БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ОБЩИЙ КУРС

Пособие
по подготовке к тестированию для студентов заочной формы получения высшего образования экономических специальностей

Гомель 2011

УДК 51
ББК 22.11
В 93

Авторы-составители: Л. П. Авдашкова, канд. физ.-мат. наук, доцент;
Л. А. Воробей, канд. физ.-мат. наук, доцент;
М. А. Грибовская, канд. физ.-мат. наук, доцент;
И. А. Кузменкова, канд. физ.-мат. наук, доцент;
Н. Г. Лопухова, канд. физ.-мат. наук, доцент;
О. А. Мокеева, канд. физ.-мат. наук, доцент;
С. А. Мокеева, канд. физ.-мат. наук, доцент;
Н. Д. Романенко, канд. физ.-мат. наук, доцент;
В. И. Тютин, канд. физ.-мат. наук, доцент;
А. А. Ядченко, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рецензенты: В. И. Гойко, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Гомельского технического университета им. П. О. Сухого;
Е. В. Легчекова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации». Протокол № 4 от 12 ноября 2010 г.

В 93 **Высшая** математика. Общий курс : пособие по подготовке к тестированию для студентов заочной формы получения высшего образования экономических специальностей / авт.-сост. : Л. П. Авдашкова [и др.]. – Гомель : учреждение образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации», 2011. – 268 с.

ISBN 978-985-461-881-4

УДК 51
ББК 22.11

ISBN 978-985-461-881-4

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Изменения, происходящие в современном обществе, привели к формированию новых подходов в математической подготовке студентов и контроле их знаний, одним из которых является компьютерное тестирование как необходимый этап допуска студента к экзамену или зачету по высшей математике.

Общий курс высшей математики является необходимой базой для дальнейшего изучения как теории вероятностей, математического программирования, так и экономических дисциплин.

В пособие включена программа общего курса высшей математики, также в нем рассмотрены важнейшие теоретические вопросы, даны типовые тесты с ответами и их подробным обоснованием. Приведены также тесты без решений, которые должен дать сам студент и выбрать на их основе правильный ответ. Если ответ студента не совпадает с приведенным в конце подраздела правильным ответом, то следует повторить теоретический материал по теме и продумать цепь логических умозаключений, приводящих к ответу на поставленный вопрос теста.

Список рекомендуемой литературы включает наименования основных литературных источников, которые можно использовать при подготовке к тестированию.

Все необходимые обозначения и определения даны в самом тексте пособия.

ПРОГРАММА КУРСА

Раздел I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1.1. Аналитическая геометрия на плоскости

Предмет аналитической геометрии. Метод координат.

Декартова и полярная системы координат. Основные виды уравнения прямой. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

Кривые второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола. Параметрическое и полярное представление линий.

1.2. Векторная алгебра

Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве. Основные операции над векторами. Скалярное произведение векторов.

Векторы в n-мерном пространстве. Линейная зависимость векторов. Разложение вектора по базису. Размерность и базис пространства. Понятие о векторных пространствах. Евклидово пространство.

1.3. Элементы аналитической геометрии в пространстве

Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве. Основные виды уравнений плоскости и прямой в пространстве. Угол между плоскостями. Угол между двумя прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости. Понятие о поверхностях второго порядка и их классификации.

1.4. Матрицы

Понятие матрицы. Операции над матрицами. Определители второго и третьего порядков и их свойства. Понятие определителя n-го порядка. Ранг матрицы. Обратная матрица. Собственные числа и собственные векторы матрицы. Понятие о квадратичных формах и их преобразовании к каноническому виду.

1.5. Системы линейных уравнений и неравенств

Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Системы линейных неравенств. Графический метод решения системы линейных неравенств с двумя переменными. Смешанные системы линейных уравнений и неравенств. Применение элементов линейной алгебры в экономике.

1.6. Комплексные числа

Комплексная плоскость. Формы представления комплексных чисел. Действия над комплексными числами. Формулы Эйлера.

Раздел II. Математический анализ и дифференциальные уравнения

2.1. Числовая последовательность и ее предел

Действительные числа. Числовые множества. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Экономическая интерпретация числа e.

2.2. Предел функции одной переменной

Функции и отображения, их области определения и значений, способы задания и график функции. Основные элементарные функции. Сложная функция. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. Односторонние пределы. Бесконечные пределы и пределы на бесконечности.

2.3. Непрерывные функции одной переменной

Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва. Непрерывность сложной функции и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Непрерывность функции на множестве. Функции, непрерывные на отрезке, и их свойства.

2.4. Производная и дифференциал функции одной переменной

Производная функции. Геометрический, механический и экономический смысл производной. Правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Логарифмическая производная. Дифференцируемость функции одной переменной. Дифференциал, его геометрический и экономический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Примеры применения производной в экономике. Производные высших порядков. Неявные функции.

2.5. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Стационарные точки. Теоремы Ферма и Ролля. Теорема Лагранжа и формула конечных приращений. Теорема Коши. Правило Лопиталя.

2.6. Приложения дифференциального исчисления

Условие постоянства функций. Условия монотонности функций. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Наибольшее и наименьшее значение функции. Достаточные условия экстремума. Условия выпуклости и вогнутости. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.

Предельные показатели в экономике. Эластичность экономических показателей. Максимизация прибыли.

2.7. Функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных. Множество уровней. Однородные функции. Выпуклые и вогнутые функции. Производственные функции. Линии изоквант и изокост. Предел функции в точке. Непрерывность. Свойства непрерывных функций. Частные производные. Примеры применения частных производных в экономике. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Градиент функции и его свойства. Производная функции по направлению, неявные функции.

Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума. Задачи на условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Выравнивание эмпирических зависимостей. Метод наименьших квадратов.

2.8. Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразная функции и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Метод замены переменной. Формула интегрирования по частям. Таблица неопределенных интегралов.

Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

2.9. Определенный интеграл

Определенный интеграл. Условия интегрируемости функций. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

Применение определенного интеграла в экономике. Применение определенного интеграла для вычисления площадей фигур, длин дуг плоских кривых и объемов тел. Приближенные методы вычисления определенных интегралов. Несобственные интегралы.

2.10. Кратные интегралы

Определение двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Тройной интеграл. Приложение кратных интегралов.

2.11. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Составление дифференциального уравнения первого порядка. Модели экономической динамики.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Метод Лагранжа вариации произвольной постоянной. Системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

2.12. Ряды

Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости числового ряда. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Функциональные ряды. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область и интервал сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям.

Ряды Фурье. Разложение функций в ряды Фурье.

Раздел I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Аналитическая геометрия на плоскости

Метод координат

Одна из главных особенностей метода аналитической геометрии заключается в употреблении чисел для определения положения геометрических образов. Числа, определяющие положение геометрических образов, называются их *координатами.*

Прямоугольной декартовой системой координат на плоскости называют совокупность трех условий:

1) две взаимно перпендикулярные прямые: ось x, или ось абсцисс, и ось y, или ось ординат;

2) начало координат – точка пересечения осей; положительное направление на каждой из осей;

3) единица масштаба на обеих осях одна и та же.

Положение точки M относительно выбранной системы координат определяется двумя координатами: абсциссой x, которая равна расстоянию от точки M до оси ординат, взятому со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, находится ли точка M вправо или влево от нее; ординатой y, которая определяется как расстояние от точки M до оси абсцисс, взятому со знаком «плюс» или «минус», смотря по тому, находится ли точка сверху или снизу от оси абсцисс (рисунок 1).

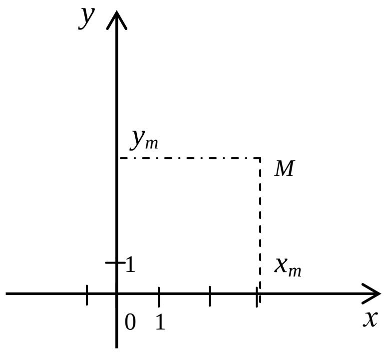


Рисунок 1

Таким образом, каждой точке плоскости соответствует упорядоченный набор двух действительных чисел и наоборот.

Обозначение: $M(x; y)$.

Оси координат делят всю плоскость на четыре квадранта (рисунок 2).

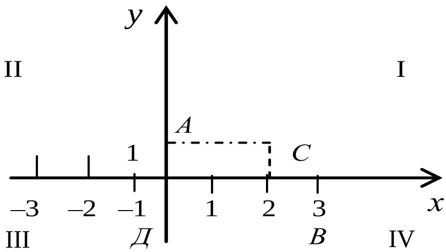


Рисунок 2

Пример 1. Точки имеют следующие координаты: $A(0; 2)$, $B(3; 0)$, $C(2; 1)$, $Д(–3; –1)$, $O(0; 0)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Пример 2. Длина отрезка AB, где $A(2; –1)$, $B(3; 5)$, равна

$$|AB| = \sqrt{(3-2)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}.$$

Пусть точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении

$\lambda = \dfrac{AC}{CB}$. Если $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, то координаты точки $C(x_C; y_C)$ определяются следующими формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \;\; y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка AB (т. е. при $\lambda = 1$) находятся по формулам

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}; \;\; y = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Пример 3. Отрезок AB, где $A(7; -2)$, $B(-1; 3)$, разделен на три равные части. Найти координаты точек деления (рисунок 3).

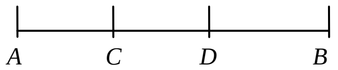


Рисунок 3

Решение

Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda_1 = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{2}$, поэтому

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{1}{2}\cdot(-1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{6\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{3};$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-2 + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом, $C\left(\dfrac{7}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Точка D делит отрезок AB в отношении $\lambda_2 = \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{2}{1} = 2$. Тогда

$$x_D = \frac{7 + 2\cdot(-1)}{1+2} = \frac{5}{3}; \;\; y_D = \frac{-2 + 2\cdot 3}{1+2} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом, $D\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Тест 1. Координаты середины отрезка AB, где $A(0; 4)$, $B(–3; –2)$:
1) $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$;
2) $\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$;
3) (–3; 2);
4) (4; –5).

Тест 2. Длина отрезка AB, где $A(0; 4)$, $B(–3; –2)$:
1) $\sqrt{13}$;
2) 3;
3) $\sqrt{45}$;
4) 4.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2
Правильный ответ	1	3

Прямая линия

Всякое уравнение первой степени относительно декартовых координат изображает прямую линию и, обратно, всякая прямая линия изображается в декартовых координатах уравнением первой степени.

Уравнение прямой по угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg} \varphi$, где угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс, и величине отрезка b, отсекаемого данной прямой на оси ординат, считая от начала координат, имеет вид $y = kx + b$.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, то $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует. Поэтому уравнение примет вид $x = a$.

Пример 4. В уравнении $y = 3x - 2$ угловой коэффициент $k = 3$, $b = –2$, $(x; y)$ − координаты любой точки прямой.

Пусть $x = 1$, тогда $y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Значит, точка (1; 1) принадлежит прямой.

Точка (2; –5) не принадлежит прямой, так как ее координаты не удовлетворяют уравнению, т. е. $-5 \neq 3 \cdot 2 - 2$; $-5 \neq 4$.

Тест 3. Прямой $y = -2x + 1$ принадлежит точка:

1) (0; 3);
2) (–1; 3);
3) (2; 3);
4) (–2; 1).

Тест 4. Прямая $y = -2x + 5$ образует с положительным направлением оси OX угол α, равный:

1) –2;
2) tg(–2);
3) arctg(–2);
4) arctg 5.

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Пример 5. Прямые $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 5$ параллельны, так как $k_1 = 2 = k_2$. Прямые $y = 3x + 5$ и $y = -\dfrac{1}{3}x - 1$ перпендикулярны, так как $k_1 = 3$, $k_2 = -\dfrac{1}{3}$ и $k_1 \cdot k_2 = 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1$.

Тест 5. Угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси ординат прямой $2x - y + 3 = 0$, равны:

1) $k = -1$; $b = 2$;
2) $k = 3$; $b = 2$;
3) $k = 2$; $b = 3$;
4) $k = 2$; $b = -1$.

Тест 6. Уравнение прямой, проходящей через начало координат и наклонной к оси OX под углом 45°, имеет вид:

1) $y = x$;
2) $y = x + 45$;
3) $y = 45x$;
4) $y = \sqrt{3x}$.

Тест 7. Уравнение прямой, параллельной прямой $y = 4x – 3$ и проходящей через начало координат, имеет вид:
1) $y = 3x + 4$;
2) $y = 4x$;
3) $y = 3x$;
4) $y = -\frac{1}{4}x$.

Тест 8. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y = -\frac{1}{2}x+1$ и проходящей через начало координат, имеет вид:
1) $y = 2x$;
2) $y = x - \frac{1}{2}$;
3) $y = –2x + 1$;
4) $y = –2x$.

Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0; y_0) и имеющей угловой коэффициент k, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Пример 6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку A(3; –1) и параллельна оси абсцисс.

Решение

Так как прямая проходит через точку A(3; –1), то ее уравнение имеет вид $y - (-1) = k(x - 3)$. Поскольку прямая параллельна оси абсцисс OX, то угол между прямой и осью OX равен 0°, а значит $k = \text{tg } 0° = 0$. Следовательно, $y + 1 = 0 \cdot (x - 3)$ или $y + 1 = 0$.

Тест 9. Уравнение прямой, проходящей через точку A(–5; –1) и параллельной прямой $y = 3x + 7$, имеет вид:
1) $y + 1 = 3(x + 5)$;
2) $y + 5 = 3(x + 1)$;
3) $y - 1 = 3(x + 5)$.

Угол между φ и прямыми $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Тест 10. Угол между прямыми $y = 2x + 1$, $y = -5x + 3$ определяется по формуле:

1) $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{1-5}{1+1\cdot 5}\right|$;

2) $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{3-1}{1+2\cdot 5}\right|$;

3) $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2-(-5)}{1+2\cdot(-5)}\right|$.

Прямая, проходящая через две данные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, определяется уравнением

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Пример 7. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; -1)$, $B(5; 0)$.

Решение

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки.

Получим $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-(-1)}{0-(-1)}$ или $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1}$.

Так как последнее равенство представляет собой пропорцию, то по свойству пропорции $(x - 3) \cdot 1 = (y + 1) \cdot 2$.

После преобразований получим $x - 3 = 2y + 1$, или $x - 3 - 1 = 2y$, или $x - 4 = 2y$.

Окончательно, $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Тест 11. Уравнение стороны AB треугольника ABC, у которого вершины имеют координаты $A(1; -2)$, $B(-3; -7)$, $C(-1; -4)$, имеет вид:

1) $\dfrac{x-1}{-3-1}=\dfrac{y+2}{-7+2}$;

2) $\dfrac{x-1}{-2-1}=\dfrac{y+2}{-7+3}$;

3) $\dfrac{x+1}{1+2}=\dfrac{y+7}{-3+7}$;

4) $\dfrac{x+1}{1+1}=\dfrac{y+4}{-2+4}$.

На рисунке 4 изображена прямая в отрезках по осям координат.

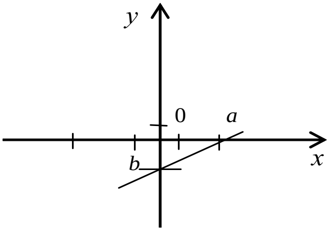


Рисунок 4

Данное уравнение имеет вид $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

где a, b – отрезки, отсекаемые прямой на осях OX, OY соответственно.

Тест 12. На рисунке 5 изображена прямая.

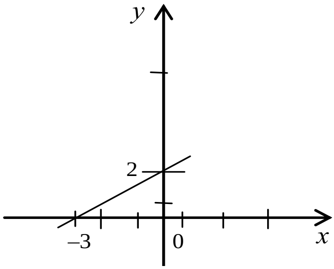


Рисунок 5

Данное уравнение имеет вид:

1) $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{2}=1;$

2) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1;$

3) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1.$

Общее уравнение прямой имеет вид $ax + by + c = 0$, где $\boldsymbol{n} = (a; b)$ − нормальный вектор прямой, т. е. вектор, перпендикулярный прямой.

Пример 8. Составить уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n} = (2; –5)$ и проходящей через точку $M(–4; 3)$.

Решение

Так как вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен прямой, то в общем уравнении прямой $a = 2$, $b = –5$, поэтому уравнение имеет вид $2x – 5y + c = 0$. Точка $M(–1; 3)$ принадлежит прямой, значит ее координаты обращают уравнение прямой в верное равенство, т. е. $2 \cdot (–1) – 5 \cdot 3 + c = 0$. Откуда $c = –17$.

Ответ: $2x – 5y – 17 = 0$.

Тест 13. Прямая $–x + 4y + 9 = 0$ перпендикулярна вектору:

1) (–1; 4);
2) (–1; 9);
3) (4; 9);
4) (4; –1).

Пусть даны две прямые $a_1x+b_1y+c=0$ и $a_2x+b_2y+c=0$.

Тогда:

1) угол φ между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}};$$

2) условие параллельности: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2};$

3) условие перпендикулярности: $a_1a_2+b_1b_2=0;$

4) пересечение прямых: $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2};$

5) условие совпадения прямых: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$;

6) точкой пересечения прямых является решение системы их уравнений.

Тест 14. Прямая $x - 2y + 5 = 0$ параллельна прямой:
1) $2x + y + 5 = 0$;
2) $x + 2y + 4 = 0$;
3) $3x - 6y + 1 = 0$;
4) $5x - 10y + 5 = 0$.

Тест 15. Прямая $x - 2y + 5 = 0$ перпендикулярна прямой:
1) $x - 2y + 1 = 0$;
2) $2x + y + 7 = 0$;
3) $x + 2y + 3 = 0$;
4) $x - 2y + 6 = 0$.

Тест 16. Прямая $x - 2y + 5 = 0$ совпадает с прямой:
1) $3x + 6y + 15 = 0$;
2) $5x - 10y + 25 = 0$;
3) $x + 2y + 5 = 0$;
4) $x - 2y + 6 = 0$.

Тест 17. Угол между прямыми $3x - y + 1 = 0$, $-2x + 5y - 4 = 0$ определяется по формуле:

1) $\cos\varphi = \dfrac{3\cdot(-1) + (-2)\cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 5^2}}$;

2) $\cos\varphi = \dfrac{3\cdot(-2) + (-1)\cdot 5}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 5^2}}$.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельной направляющему вектору $\boldsymbol{a} = (m; n)$, имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Очевидно, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0$.

Пример 9. Найти уравнение прямой, перпендикулярной прямой $3x - y + 2 = 0$ и проходящей через точку $B(-1; 0)$.

Решение

Так как прямые перпендикулярны, то нормальный вектор одной является направляющим вектором другой. Значит, $\boldsymbol{n} = (3; -1) = \boldsymbol{a}$. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x-(-1)}{3} = \frac{y-0}{-1}.$$

Преобразуем: $-1(x + 1) = (y - 0) \cdot 3$, $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Тест 18. Уравнение прямой, параллельной вектору $\boldsymbol{a} = (-2; 4)$ и проходящей через точку $M(3; -5)$, имеет вид:

1) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-(-5)}{4}$;

2) $x - 3 = y + 5$;

3) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-5}{4}$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{a} = (m; n)$, имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad t \in R.$$

Тест 19. Направляющим вектором прямой $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + t, \end{cases}$, $t \in R$ является:

1) $\boldsymbol{a} = (2; -1)$;

2) $\boldsymbol{a} = (3; 1)$;

3) $\boldsymbol{a} = (-3; -1)$.

Тест 20. Направляющим вектором прямой $3x - y + 5 = 0$ является:

1) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$;

2) (3; –1);

3) $\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$;

4) (1; 3).

Расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ определяется по формуле

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример 10. Найти длину высоты CD треугольника ABC с вершинами $A(3;\ 0)$, $B(–1;\ 2)$, $C(4;\ –6)$.

Решение

Длина высоты треугольника ABC равна расстоянию от точки C до прямой AB.

Найдем уравнение стороны AB треугольника, используя уравнение прямой по двум точкам:

$$\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-0}{2-0},\text{ или } 2(x-3)=-4y,\text{ или } 2x+4y-6=0.$$

Тогда длина высоты равна

$$d=\frac{|2\cdot 5+4\cdot(-6)|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{|10-24|}{\sqrt{4+16}}=\frac{|-14|}{\sqrt{20}}=\frac{14}{\sqrt{20}}=\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Тест 21. Расстояние от точки (4; –3) до прямой $-x + 5y + 2 = 0$ находится по формуле:

1) $d=\dfrac{|-1\cdot 4+5\cdot(-3)+2|}{\sqrt{(-1)^2+5^2}}$;

2) $d=\dfrac{|-1\cdot 4+5\cdot(-3)+2|}{\sqrt{(-1)^2+5^2}}$;

3) $d=|-1\cdot 4+5\cdot(-3)+2|$;

4) $d=\dfrac{|-1\cdot 4+5\cdot(-3)+2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Правильный ответ	2	3	3	1	2	1	1	3	1	1	1

Номер теста	14	15	16	17	18	19	20	21
Правильный ответ	3	2	2	2	1	2	1	1

Кривые второго порядка

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, и большая чем расстояние между фокусами, равное $2c$ (рисунок 6).

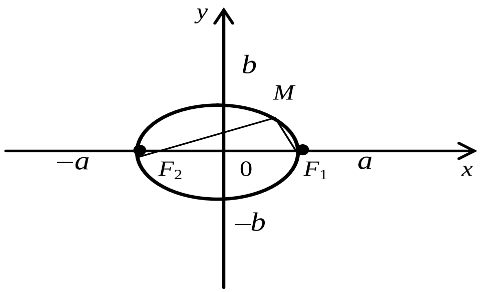


Рисунок 6

Простейшее каноническое уравнение эллипса получается в системе координат, в которой за ось абсцисс выбрана прямая, соединяющая фокусы, начало координат 0 − середина отрезка, концами которого служат фокусы, ось ординат – прямая, проходящая перпендикулярно оси OX через точку 0. Тогда уравнение эллипса примет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b^2=a^2-c^2$.

При таком выборе системы координат оси координат совпадают с осями симметрии эллипса, а начало координат − с центром симметрии. Точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(–a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ –b)$ называются вершинами эллипса. Отрезки, заключенные между вершинами, называются осями эллипса: большая (фокальная) ось $A_1A_2 = 2a$, малая ось $B_1B_2 = 2b$. Параметры a и b уравнения равны полуосям эллипса. Эксцентриситетом (ε) эллипса называется отношение расстояния ($2c$) между фокусами к большей оси ($2a$), т. е. $\varepsilon = \frac{c}{a}$; очевидно, что $\varepsilon < 1$. Директрисами эллипса называются две прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис следующие: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Пример 11. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение

Уравнение будем искать в виде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Из условия $b = 3$. Так как с одной стороны $\varepsilon = \frac{c}{a}$, а с другой стороны по условию $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Откуда $c = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Для эллипса параметры a, b, c связаны соотношением $b^2 = a^2 - c^2$. Поэтому, подставляя значения b и c, получим уравнение

$$3^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,$$

или

$$a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3,$$

или

$$a^2 = 6.$$

Ответ: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1.$

Тест 22. Уравнение эллипса, полуоси которого равны a = 3, b = 2, имеет вид:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;$

2) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1;$

3) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1.$

Тест 23. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$

Вычислить длину осей, фокусное расстояние, эксцентриситет:

1) 16; 9; 25; $\frac{16}{25}$;

2) 8; 6; $2\sqrt{7}$; $\frac{\sqrt{7}}{4}$;

3) 4; 3; 1; 8.

Пример 12. Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$ Написать уравнение его директрис.

Решение

Уравнения директрис следующие: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$. Из уравнения a^2 = 36, b^2 = 20. Следовательно, a = 6, $c^2=a^2-b^2=36-20=16$ или c = 4. Найдем ε = $\frac{c}{a}=\frac{4}{6}$. Подставим в уравнения $x=\pm\frac{6}{\frac{4}{6}}$; $x=\pm\frac{36}{4}=\pm9$.

Ответ: x = ±9.

Уравнение эллипса, центр которого находится в точке (x_0; y_0), а оси симметрии параллельны осям координат, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Тест 24. Центр эллипса $\frac{(x-3)^2}{10}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$ находится в точке:

1) (3; 1);
2) (3; –1);
3) (10; 5);
4) (5; 10).

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, и меньшая чем расстояние между фокусами, равное $2c$ (рисунок 7).

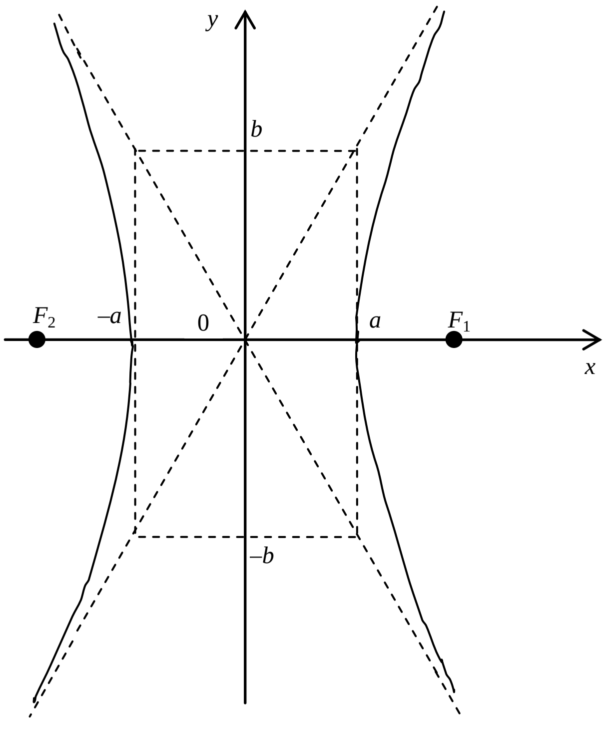


Рисунок 7

Простейшее каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Прямая, соединяющая фокусы F_1, F_2 гиперболы, служит осью абсцисс, начало координат находится в середине между фокусами; при этом оси координат совпадают с осями симметрии гиперболы, начало координат – с ее центром симметрии (оси и центр гиперболы).

Гипербола имеет две действительные вершины $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$ на фокальной оси; отрезок $A_1A_2 = 2a$ называется действительной осью гиперболы, отрезок $B_1B_2 = 2b$ – мнимой осью гиперболы. Таким образом, параметры a и b в уравнении гиперболы равны длинам действительной и мнимой полуосей соответственно.

Если $a = b$, то гипербола называется равносторонней.

Если мнимая ось гиперболы имеет длину $2a$ и направление по оси x, а действительная ось, длиной $2b$, совпадает с осью y, то уравнение такой гиперболы имеет следующий вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где $a^2 = c^2 - b^2$.

Гиперболы (1) и (2) называются сопряженными гиперболами.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ и при этом $\varepsilon > 1$. Директрисами гиперболы называются прямые, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие на расстоянии, равном $\dfrac{a}{\varepsilon}$. Уравнения директрис следующие: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$. Асимптоты гиперболы определяются равенствами $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Если точка, двигаясь по гиперболе, неограниченно удаляется, то расстояние ее от одной из асимптот стремится к нулю. Асимптоты являются диагоналями прямоугольника со сторонами $2a$, $2b$ (рисунок 7).

Пример 13. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что:

1. Расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами – 10.

2. Действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку (9; –4).

Решение

1. Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

Так как расстояние между вершинами равно 8, то $2a = 8$ или $a = 4$. Учитывая, что расстояние между фокусами равно 10, имеем $2c = 10$, откуда $c = 5$. Найдем b^2 из соотношения $b^2 = c^2 - a^2$, т. е. $b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$.

Ответ: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$

2. Так как действительная ось равна 6, то $2a = 6$ или $a = 3$. Поэтому уравнение гиперболы принимает вид $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ Поскольку гипербола проходит через точку (9; –4), то ординаты этой точки обращают уравнение в истинное равенство, т. е. $\frac{x^2}{3^2}-\frac{(-4)^2}{b^2}=1,$ или $\frac{81}{9}-\frac{16}{b^2}=1,$ или $9 - 1 = \frac{16}{b^2},$ или $b^2 = \frac{16}{8} = 2.$

Ответ: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{8}=1.$

Тест 25. Уравнение гиперболы, действительная ось которой равна 10 и лежит на оси *OX*, а мнимая ось равна 16 и лежит на оси *OY*, имеет вид:

1) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{16}=1;$

2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1;$

3) $-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1.$

Тест 26. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$. Вычислить длину осей, фокусное расстояние, эксцентриситет:

1) 10; 16; $2\sqrt{89}$; $\frac{\sqrt{89}}{5}$;

2) 4; 5; $\sqrt{41}$; $\frac{\sqrt{41}}{2}$;

3) 5; 4; $\sqrt{9}$; $\frac{\sqrt{9}}{5}$.

Пример 14. Дана гипербола $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1$. Написать уравнение ее директрис и асимптот.

Решение

Из уравнения $a^2 = 16$, $b^2 = 25$. Откуда $a = 4$, $b = 5$. Найдем $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{16+25}}{4}=\frac{\sqrt{41}}{4}$. Тогда уравнения директрис следующие: $y=\pm\frac{b}{a}x$, или $x = \pm\frac{4}{\frac{\sqrt{41}}{4}}$, или $x = \pm\frac{16}{\sqrt{41}}$.

Уравнения асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x$ после подстановки a, b принимают вид $y = \pm\frac{5}{4}x$.

Ответ: $x = \pm\frac{16}{\sqrt{41}}$; $y = \pm\frac{5}{4}x$.

Тест 27. Указать, принадлежит ли точка (0; 2) гиперболе $-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9} = 1$:

1) да;
2) нет.

Уравнение гиперболы, центр которой находится в точке $(x_0; y_0)$, действительная ось совпадает с осью OX, мнимая – с осью OY, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Тест 28. Центр гиперболы $\frac{(x+5)^2}{9}+\frac{(y+7)^2}{16}=1$ находится в точке:

1) (5; 7);
2) (–5; –7);
3) (9; 16);
4) (3; 4).

Ответы на тестовые задания

Номер теста	22	23	24	25	26	27	28
Правильный ответ	1	2	2	2	1	2	2

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом параболы, и данной прямой, называемой директрисой параболы (рисунок 8).

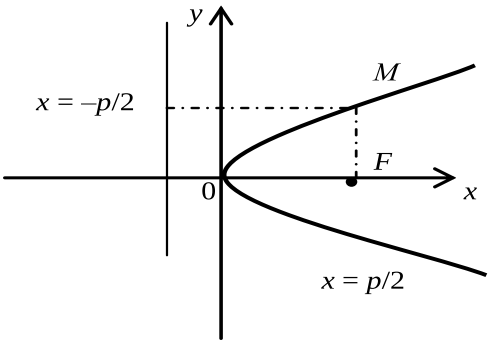


Рисунок 8

Если за ось абсцисс принять перпендикулярную прямую, проведенную из фокуса к директрисе, а начало координат поместить посередине между фокусом и директрисой, то уравнение параболы примет вид

$$y^2 = 2px,$$

где p – параметр параболы, расстояние от фокуса параболы до ее директрисы.

Парабола имеет одну ось симметрии, которая совпадает при таком выборе системы координат с осью X. Единственная вершина параболы совпадает с началом координат и является единственной точкой пересечения параболы с осями.

Пример 15. Составить уравнение параболы, зная, что фокусы имеют координаты (0; 5), ось ординат служит осью симметрии, а вершина находится в начале координат.

Решение

Так как осью симметрии является ось OY, то уравнение будет иметь вид $x^2 = 2py$, так как фокус в общем случае имеет координаты $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$, то исходя из условия имеем $\frac{p}{2} = 5$, откуда $p = 10$. Таким образом, $x^2 = 2 \cdot 10 \cdot y$ или $x^2 = 20y$ – искомое уравнение.

Тест 29. В уравнении параболы $y^2 = 3x$ значение параметра p равно:

1) 3;

2) $\frac{3}{2}$;

3) 1;

4) $3x$.

Тест 30. Среди уравнений второго порядка указать уравнение гиперболы:

1) $y^2 = -3x$;

2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Если вершина параболы находится в точке $(x_0; y_0)$, то ее каноническое уравнение примет следующий вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Ответы на тестовые задания

Номер теста	29	30
Правильный ответ	2	2

1.2. Векторная алгебра

При изучении различных разделов экономики, механики, физики, других учебных дисциплин приходится иметь дело с величинами, для характеризации которых в выбранной системе единиц достаточно указать их численные значения. Эти величины называются скалярными. К числу скалярных величин можно отнести длину, площадь, объем, массу, температуру и т. п. Встречаются, тем не менее, такие величины, для определения которых необходимо знать их направления в пространстве. Указанные величины будем называть векторными. Примерами векторных величин являются сила, скорость, ускорение.

Геометрические векторные величины изображаются с помощью направленных отрезков.

Связанным вектором (или направленным отрезком) называется любой отрезок прямой, если только указано, какая из двух ограничивающих его точек является начальной, какая – конечной. Если точка A – начало отрезка, а точка B – его конец, то связанный вектор будем обозначать $\overline{AB}.$ Его направление будем указывать стрелкой, идущей от начала A к концу B.

Длиной $|\overline{AB}|$(или модулем) связанного вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Связанный вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым.* Нулевой вектор обозначается 0, его длина равна 0: $|0| = 0,$ он направления не имеет.

Связанные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *сонаправленными*, если являются сонаправленными лучи $[AB)$ и $[CД),$ и *противоположно направленными* – если противоположно направлены эти лучи.

Два ненулевых связанных вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ назовем *равными* (это обозначается $\overline{AB} = \overline{CD}$), если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Свободным вектором ***a*** (или просто вектором) назовем множество равных между собой связанных векторов. При дальнейшем из контекста будет ясно, какой вектор имеется в виду (связанный или свободный). Для задания вектора достаточно указать какой-либо один вектор из всего множества $\{AB, CD, MN, \ldots\}$ равных связанных векторов, например, $\overline{AB}$ (рисунок 9).

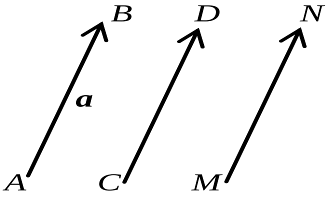


Рисунок 9

Рассмотренные понятия (длина, направление и т. п.), которые введены для связанных векторов, имеют аналоги также и для свободных. Часто векторы обозначают одной жирной строчной буквой: $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$ (рисунок 10).

Линейные операции над векторами

Определим для свободных векторов операции их сложения, вычитания, умножения вектора на действительное число.

Суммой двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по правилу треугольника называется такой третий вектор $\boldsymbol{c}$, что начало его совпадает с началом вектора $\boldsymbol{a}$, а конец – с концом вектора $\boldsymbol{b}$.

Иногда вместо $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ пишут $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$. *Суммой* $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots$ $\ldots + \boldsymbol{a}_n$ конечного числа векторов называется такой вектор $\boldsymbol{a}$, который замыкает ломаную линию, построенную из данных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots,$ $\boldsymbol{a}_n$ таким образом, что начало каждого последующего вектора совпадает с концом предыдущего. Указанный вектор $\boldsymbol{a}$ направлен из начала первого вектора суммы в конец последнего (правило многоугольника) (рисунок 10).

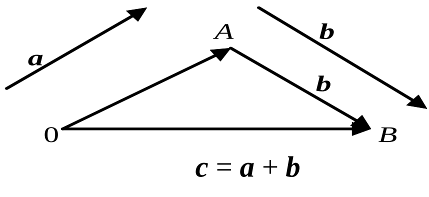


Рисунок 10

На рисунке 11 изображена сумма $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$.

Произведением вектора ***a*** *на число* α называется вектор $\boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a}$, длина которого равна $|\boldsymbol{b}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|$, направление которого совпадает с направлением $\boldsymbol{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно направлению $\boldsymbol{a}$, если $\alpha < 0$. По определению $\alpha \boldsymbol{a} \cdot 0 = 0$ для любого α и $0 \cdot \boldsymbol{a} = 0$ для любого $\boldsymbol{a}$. На рисунке 12 изображены векторы $\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{a}$.

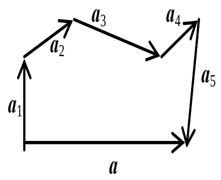


Рисунок 11

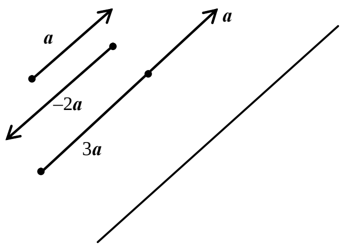


Рисунок 12

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называются *коллинеарными*, если их соответствующие связанные векторы параллельны одной и той же прямой. На рисунке 12 изображены коллинеарные векторы $\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{a}$.

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называют *компланарными,* если их соответствующие связанные векторы параллельны одной и той же плоскости (рисунок 13).

Углом φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется величина наименьшего угла между связанными векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ (рисунок 14). Понятно, что $0 \le \varphi \le 0$. Если $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными* (перпендикулярными, это обозначается $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$).

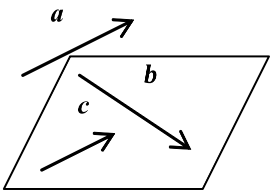


Рисунок 13

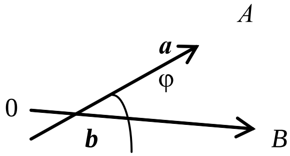


Рисунок 14

Разностью $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, равный сумме векторов $\boldsymbol{a}$ и $-1\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}$, т. е. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$. Итак, по определению, чтобы вычесть из вектора $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$, необходимо к вектору $\boldsymbol{a}$ прибавить вектор $-\boldsymbol{b}$, который называется противоположным вектору $\boldsymbol{b}$. Из рисунка 15 следует, что если на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, приведенных к общему началу, построить параллелограмм как на сторонах и провести диагонали, то диагональ параллелограмма, исходящая из общего начала векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна их сумме $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, а другая диагональ – их разности $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

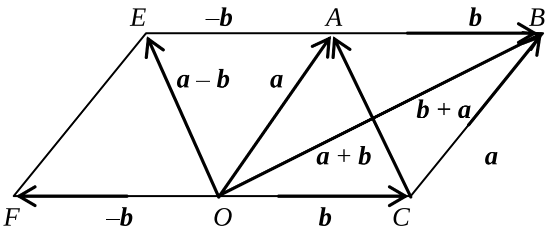


Рисунок 15

Данный способ нахождения суммы $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется правилом параллелограмма.

Вектор, длина которого равна единице, будем называть единичным вектором, или ортом. Через $\boldsymbol{a}^0$ будем обозначать единичный вектор, имеющий направление вектора $\boldsymbol{a}$.

Векторный базис на плоскости и в пространстве

В случае неколлинеарности двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ любой третий вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, как следует из рисунка 16, можно однозначно представить в виде

$$\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}, \tag{1}$$

где $x, y \in R$.

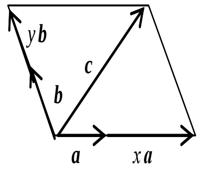


Рисунок 16

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется вектор

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n, \tag{2}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ представлен в виде линейной комбинации (2), то будем говорить, что $\boldsymbol{a}$ разложен по векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. В частности, на основании равенства (1) мы можем сказать, что вектор $\boldsymbol{c}$ разложен по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Векторным базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара $(\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2)$ неколлинеарных векторов этой плоскости.

Можно заметить, что каждая плоскость содержит бесконечное множество базисов.

По аналогии с выводом, сделанным из рисунка 16, можно утверждать, что любой вектор $\boldsymbol{a}$ некоторой плоскости можно однозначно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ этой плоскости, т. е.

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2. \tag{3}$$

Из этого следует вывод: если на плоскости выбран базис $(\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2)$, то каждому вектору $\boldsymbol{a}$ этой плоскости ставится в соответствие единственная упорядоченная пара действительных чисел x, y и, обратно, каждой упорядоченной паре чисел x, y поставлен в соответствие единственный вектор $\boldsymbol{a}$, который определяется равенством (3). При этом числа x, y мы будем называть координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1; \boldsymbol{e}_2)$.

Ортонормированным базисом называется такой базис $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j})$, который удовлетворяет условиям: $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$, $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = 1$, т. е. векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ этого базиса единичны и взаимно перпендикулярны. В этом случае, если $\boldsymbol{a} = (x; y)$ в базисе $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j})$, то $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ и наоборот. Числа x, y называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j})$.

Два вектора $\boldsymbol{a} = (x_1; y_1)$, $\boldsymbol{b} = (x_2; y_2)$ образуют базис на плоскости тогда и только тогда, когда определитель второго порядка, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля.

Пример 1. Разложение вектора $\boldsymbol{a} = (-3; 7)$ по базису $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j})$ имеет вид $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$. Если же $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$, то координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $(\boldsymbol{i}; \boldsymbol{j})$ будут $(2; -3)$.

Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$, надо от координат конца B этого вектора вычесть координаты его начала A, т. е. если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Пример 2. Пусть $A(3; -5)$, $B(-2; 3)$, тогда $\overline{AB} = (-2 - 3; 3 - (-5)) =$ $= (-5; 8)$.

Тест 1. Найти координаты вектора $\overline{AB}$, если $A(3; 4)$, $B(5; 7)$:

1) (2; 4);
2) (2; 7);
3) (2; 3);
4) (3; 3);
5) (3; 3).

Пример 3. Пара векторов $\boldsymbol{a} = (1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 5)$ образует базис на плоскости, так как определитель, составленный из координат, не равен 0: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 11 \neq 0$.

Тест 2. Определить, какие из следующих пар векторов не образуют базис на плоскости:

1) (3; 4), (2; 1);
2) (–2; 1), (2; 5);
3) (–4; 5), (1; 4);
4) (1; 2), (3; 6);
5) (7; 1), (2; 4).

Векторным базисом пространства называется любая упорядоченная тройка ($\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2$, $\boldsymbol{\ell}_3$) некомпланарных векторов этого пространства.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В случае равенства нулю хотя бы одного из этих векторов скалярное произведение равно нулю. Таким образом, по определению имеем

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi, \tag{4}$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ обозначается также при помощи символов $\boldsymbol{ab}$.

Знак скалярного произведения определяется величиной φ:

$$\text{если } 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \text{ то } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ge 0,$$

$$\text{если же } \frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi, \text{ то } \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} < 0.$$

Скалярное произведение определяется только для двух векторов.

Операции над векторами в координатной форме

Пусть в системе координат Oxy даны векторы $\boldsymbol{a} = (x_1; y_1) = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = (x_2; y_2) = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$.

Тогда:

1. Каждая координата суммы двух (или более) векторов равна сумме соответствующих координат векторов-слагаемых, т. е. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов, т. е. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

3. Каждая координата произведения вектора на число α равна произведению соответствующей координаты этого вектора на α, т. е. $\alpha\boldsymbol{a} = (\alpha x_1; \alpha y_1)$.

4. Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, т. е. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Следствие. Длина вектора $\boldsymbol{a} = (x;\ y)$ равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, т. е.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Пример 4. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}, \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

Требуется:

1. Найти $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$.
2. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$.
3. Найти длину вектора $\boldsymbol{c}$.

Решение

1. По свойству 3 находим координаты векторов $2\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{b}$: $2\boldsymbol{a} = 2(-2;\ 3) = (-4;\ 6)$, $-\boldsymbol{a} = -(-2;\ 3) = (2;\ -3)$, $3\boldsymbol{b} = 3(3;\ -1) = (9;\ -3)$, $2\boldsymbol{b} = 2(3;\ -1) = = (6;\ -2)$.

По свойствам 2, 1 находим координаты векторов $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$: $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = (-4;\ 6) - (9;\ -3) = (-13;\ 9)$, $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = (2;\ -3) + (6;\ -2) = (8;\ -5)$.

2. По свойству 4 $\boldsymbol{cd} = -13 \cdot 8 + 9 \cdot (-5) = -104 - 45 = -149$.

3. По следствию из свойства 4 $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{(-13)^2 + 9^2} = \sqrt{250}$.

Тест 3. Определить координаты вектора $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = (-3;\ 4)$, $\boldsymbol{b} = (5;\ -2)$:

1) (2; 2);
2) (–3; 5);
3) (4; –2);
4) (5; 4);
5) (2; –2).

Тест 4. Определить координаты вектора $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = (2;\ -1)$, $\boldsymbol{b} = (3;\ -4)$:

1) (–1; 3);
2) (2; 3);
3) (4; –2);
4) (–4; 2);
5) (–1; 2).

Тест 5. Найти координаты вектора 3***a***, если ***a*** = (2; –1):
1) (4; –3);
2) (5; –1);
3) (2; 2);
4) (5; 2);
5) (6; –3).

Тест 6. Найти скалярное произведение ***a***, ***b*** векторов ***a*** = (1; –4), ***b*** = (–2; 3):
1) –14;
2) 10;
3) –10;
4) –2;
5) 2.

Тест 7. Найти длину вектора ***a*** = (–12; 5):
1) 12;
2) 13;
3) $\sqrt{7}$;
4) 60;
5) 10.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7
Правильный ответ	3	4	1	1	5	1	2

1.3. Элементы аналитической геометрии в пространстве

Прямоугольная система координат в пространстве состоит из трех взаимно перпендикулярных осей координат, пересекающихся в одной и той же точке (начало координат 0) и имеющих направление, а также единицы масштаба по каждой оси (рисунок 17).

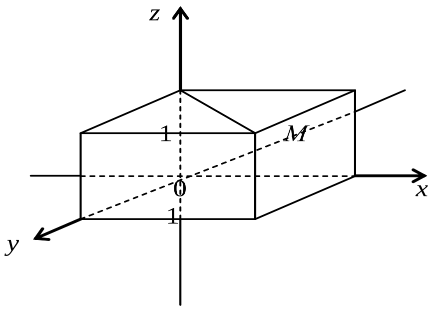


Рисунок 17

Положение точки M на плоскости определяется единственным образом тремя числами – ее координатами $M(x_m; y_m; z_m)$, где x_m – абсцисса, y_m – ордината, z_m – аппликата.

Каждая из них дает расстояние от точки M до одной из плоскостей координат со знаком, учитывающим, по какую сторону от этой плоскости расположена точка: взята ли она в сторону положительного или отрицательного направления третьей оси.

Три координатные плоскости делят пространство на 8 частей (октантов).

Расстояние между двумя точками $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$ вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пусть даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда координаты точки $C(x; y; z)$, делящей отрезок AB в отношении λ, выражаются следующими формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Пример 1. Найти расстояние AB, если $A(3; 2; -10)$ и $B(-1; 4; -5)$.

Решение

Расстояние AB вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2 + (-5-(-2))^2} = \sqrt{16+16+9} = \sqrt{41}.$$

Совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению с тремя переменными, составляет некоторую поверхность.

Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют двум уравнениям, составляет некоторую линию – линию пересечения соответствующих двух поверхностей.

Всякое уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ изображает плоскость, и, обратно, всякая плоскость может быть представлена уравнениями первой степени.

Параметры A, B, С являются координатами нормального вектора, перпендикулярного плоскости, т. е. $\boldsymbol{n} = (A; B; C)$.

Уравнение плоскости в отрезках, отсекаемых на осях: a – по оси OX, b – по оси OY, c – по оси OZ: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

Пусть даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Условие параллельности плоскостей: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Условие перпендикулярности плоскостей: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Угол между плоскостями определяется по следующей формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Пусть плоскость проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

Тогда ее уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Тест 1. Плоскость $4x-y+3z+1=0$ проходит через точку:

1) $A(-1; 6; 3)$;

2) $B(3; -2; -5)$;

3) $C(0; 4; -1)$;
4) $D(2; 0; 5)$.

Тест 2. Уравнение плоскости OXY следующее:
1) $z = 0$;
2) $x = 0$;
3) $y = 0$.

Пример 2. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости OXY и проходящей через точку $(2; -5; 3)$.

Решение

Так как плоскость параллельна плоскости OXY, ее уравнение имеет вид $Cz + D = 0$ (вектор $\boldsymbol{\pi} = (0; 0; C) \perp OXY$).

Так как плоскость проходит через точку $(2; -5; 3)$, то $C \cdot 3 + D = 0$ или как $D = -3C$.

Таким образом, $CZ - 3C = 0$. Так как $C \neq 0$, то $z - 3 = 0$.

Ответ: $z - 3 = 0$.

Тест 3. Уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $(3; -1; -4)$, имеет вид:
1) $3x - y - 4z = 0$;
2) $3x + y + 4z - 2 = 0$;
3) $3x - y - 4z - 5 = 0$;
4) $-3x - y - 4 = 0$.

Тест 4. Величина отрезка, отсекаемого по оси OY плоскостью $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1$, равна:
1) 5;
2) –3;
3) 2;
4) 1.

Пример 3. Написать уравнение плоскости:

1. Параллельной плоскости $3x - y + 2z + 5 = 0$ и проходящей через точку $A(2; 0; -1)$.

2. Перпендикулярной плоскости $3x - y + 2z + 5 = 0$ и проходящей через точку $B(0; 2; 0)$.

Решение

Уравнения плоскостей будем искать в виде $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$.

1. Так как плоскости параллельны, то $\frac{A_1}{3} = \frac{B_1}{-1} = \frac{C_1}{2} = t$. Отсюда $A = 3t$, $B = -t$, $C = 2t$, где $t \in R$. Пусть $t = 1$. Тогда $A = 3$, $B = -1$, $C = 2$. Поэтому уравнение принимает вид $3x - y + 2z + D = 0$. Координаты точки A, принадлежащей плоскости, обращают уравнение в истинное равенство. Следовательно, $3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + D = 0$. Откуда $D = 4$.

Ответ: $3x - y + 2z + 4 = 0$.

2. Поскольку плоскости перпендикулярны, то $3 \cdot A - 1 \cdot B + 2 \cdot C = 0$.

Так как переменных три, а уравнение одно, то две переменные принимают произвольные одновременно не равные нулю значения. Пусть $A = 1$, $B = 3$. Тогда $C = 0$. Уравнение принимает вид $x + 3y + D = 0$, $D = -6$.

Ответ: $x + 3y - 6 = 0$.

Тест 5. Указать плоскость, параллельную плоскости $x - 2y + 7z - 2 = 0$:

1) $x + 2y + 3z - 2 = 0$;

2) $2x - 4y + 14z - 8 = 0$;

3) $-2x + 7y - z - 2 = 0$;

4) $2x - y + 4 = 0$.

Тест 6. Указать плоскость, перпендикулярную плоскости $x - 2y + 6z - 2 = 0$:

1) $x + 2y + 7z - 2 = 0$;

2) $-2x - 4y - z - 8 = 0$;

3) $-2x + 7y - z - 2 = 0$;

4) $3x - 5y + z = 0$.

Тест 7. Косинус угла между плоскостями $3x + y - z - 1 = 0$ и $x - 4y - 5z + 3 = 0$ определяется по формуле:

1) $\cos\varphi = \dfrac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + 5^2}}$;

2) $\cos\varphi = \dfrac{3\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 5}{\sqrt{3+1+1}\cdot\sqrt{1+4+5}}$;

3) $\cos\varphi = \dfrac{3\cdot 1+1\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5)}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-5)^2}}$.

Тест 8. Расстояние от точки (3; 1; –1) до плоскости $3x - y + 5z + 1 = 0$ определяется по формуле:

1) $d = \dfrac{|3\cdot 3+1\cdot 1+5\cdot 1|}{\sqrt{3+1+5}}$;

2) $d = \dfrac{|3\cdot 3-1\cdot 1+5\cdot(-1)+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2}}$.

Прямая в пространстве

Прямая линия в пространстве может быть определена как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Прямая, проходящая через точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, описывается следующими уравнениями:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}.$$

Прямая, проходящая через точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и параллельная направляющему вектору $\boldsymbol{a} = (m;\ n;\ p)$, задается каноническим уравнением

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}, \ t \notin R.$$

Таким образом, положение прямой определяется ее направляющим вектором:

1) угол φ между двумя прямыми определяется как угол между векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$; если $\boldsymbol{a}_1 = (m_1;\ n_1;\ p_1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (m_2;\ n_{2;},\ p_2)$ − направляющие векторы двух прямых, то

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{n_2^2 + m_2^2 + p_2^2}};$$

2) условие параллельности прямых: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;

3) условие перпендикулярности прямых: $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$;

4) условие пересечения прямых $\dfrac{x - a_1}{m_1} = \dfrac{y - b_1}{n_1} = \dfrac{z - c_1}{p_1}$ и $\dfrac{x - a_2}{m_2} = \dfrac{y - b_2}{n_2} = \dfrac{z - c_2}{p_2}$:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 4. Написать уравнение прямой OA, проходящей через точку $A(2;\ –1;\ 4)$ и начало координат 0.

Решение

Воспользуемся каноническим уравнением прямой. Для его записи надо знать хотя бы одну точку прямой и направляющий вектор $\boldsymbol{a}$. Так как обе точки принадлежат прямой, то можно взять одну из них, а в качестве направляющего вектора – вектор $\overline{OA} = (2 – 0;\ –1 – 0;\ 4 – 0)$, так как он лежит на прямой, а значит, параллелен ей

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 4}{4}.$$

Тест 9. Направляющий вектор прямой

$$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{0}$$

равен:

1) $\boldsymbol{a}$ = (0; –2; 3);
2) $\boldsymbol{a}$ = (2; 4; 0);
3) $\boldsymbol{a}$ = (2; 4);
4) $\boldsymbol{a}$ = (2; 4; 3).

Тест 10. Прямые $\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-1}{1}$ и $\frac{x}{6}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+3}{2}$:

1) параллельны;
2) пересекаются;
3) скрещиваются;
4) перпендикулярны.

Пример 5. Определить, пересекаются ли прямые $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{6}=$ $=\frac{z-5}{2}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{9}=\frac{z+1}{6}$.

Решение

Проверим условие пересечения прямых

$$\begin{vmatrix} 1-0 & -2-3 & 5-(-1) \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

$$2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

18 + 54 – 10 – (24 + 9 – 45) = 0,18 + 54 – 10– 24 – 9 + 45 = 0,
29 + 45 = 0, 74 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ прямые скрещиваются.

Прямая и плоскость в пространстве $\boldsymbol{R}^3$

Пусть даны прямая $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ и плоскость $Ax + By + Cz = 0$.

Чтобы найти их точку пересечения, надо решить систему этих трех уравнений.

Угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$A\cdot m-B\cdot n-C\cdot p=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

Условие того, что прямая лежит в плоскости:

$$\begin{cases} A\cdot a+B\cdot b+C\cdot c+D=0, \\ Am+Bn+Cp=0. \end{cases}$$

Пример 6. Определить, лежит ли прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{4}$ в плоскости $2x - y + z + 1 = 0$.

Решение

Из уравнения прямой известна точка (0; 2; –1) этой прямой. Если прямая лежит в плоскости, то и эта точка принадлежит плоскости, т. е. $2 \cdot 0 - 2 + (-1) + 1 = 0$, откуда $0 = 0$.

Проверим второе условие: прямая и плоскость параллельны, т. е. $2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 0$, но $10 \neq 0$. Следовательно, прямая не лежит в плоскости, а пересекает ее в точке (0; 2; –1).

Тест 11. Прямая $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ и плоскость $x + 4y - 3z + 7 = 0$:

1) параллельны;
2) пересекаются;
3) прямая лежит в плоскости.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8
Правильный ответ	1	1	1	2	2	2	3	2

Номер теста	9	10	11
Правильный ответ	2	1	2

1.4. Матрицы

Прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей.* Здесь a_{ij} – действительные числа ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), называемые *элементами матрицы*, i и j – соответственно индексы строки и столбца. При этом произведение $m \times n$ числа строк на число столбцов называется *размерностью матрицы* A. Матрицы обозначаются буквами A, B, C, … .

Пример 1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Размерность матрицы A – $2 \cdot 3$ (2 – число строк, 3 – число столбцов).
Элементы матрицы: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = -3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 8$.

Тест 1. Размерность матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ следующая:

1) 2×2;
2) 4×4;
3) 2×4;
4) 4×2;
5) 1×1.

Тест 2. Размерность матрицы $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ следующая:

1) 1×2;
2) 5×3;
3) 3×5;
4) 2×1;

5) 1×1.

Тест 3. В матрице $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 8 & 15 & 10 \end{pmatrix}$ элементы b_{23}, b_{34} следующие:

1) –1; 10;
2) 8; 1;
3) 3; 10;
4) 8; –4;
5) 4; 3.

В том случае, когда $m = n$, матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *квадратной порядка* n (*или* n-*го порядка*).

Элемент a_{ij} квадратной матрицы A называется *диагональным*, если $i = j$.

Совокупность диагональных элементов квадратной матрицы называется ее *главной диагональю*: a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}.

Пример 2. В матрице третьего порядка $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ диагональными элементами являются $a_{11} = 1, a_{22} = 4, a_{33} = -6$. Совокупность $\{1; 4; -6\}$ – главная диагональ матрицы A.

Тест 4. Главную диагональ матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ составляют элементы:

1) 2; 2;
2) 1; 2;
3) 2; 0;
4) 0; 2;
5) 0; 0.

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее недиагональные элементы равны 0, т. е. матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1. Обозначается буквой E и имеет следующий вид:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Матрица A – диагональная матрица третьего порядка:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тест 5. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Диагональной матрицей является матрица:

1) A;
2) B;
3) C;
4) D;
5) K.

Пример 4. Матрица E – единичная матрица второго порядка:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Матрица E – единичная матрица четвертого порядка:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тест 6. Единичной матрицей третьего порядка E_3 является матрица:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$;

2) $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $E=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Треугольной называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно *верхнюю* и *нижнюю* треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – треугольная (верхняя треугольная) матрица; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ – треугольная (нижняя треугольная) матрица.

Тест 7. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Треугольной матрицей является матрица:
1) A;
2) B;
3) C;
4) D;
5) K.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю. Обозначается буквой O и имеет вид

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Нулевая матрица размерности 2×3 имеет вид

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тест 8. Нулевая матрица размерности 1×3 имеет вид:
1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$;
2) $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
3) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;
4) $E=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
5) $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны. Обозначение: $A = B$.

Пример 8. Указать, какие из матриц являются равными:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение

Найдем размерности матриц: A имеет размерность 2×2, B – 2×2, C – 2×3, D – 2×2. Так как размерность матрицы C не совпадает с размерностями матриц A, B, D, то матрица C выбывает из дальнейшего рассмотрения. Для матриц A и B, матриц одинаковой размерности, проверим выполнение равенств соответствующих элементов: $a_{11} = 1$ и $b_{11} = 1$, $a_{12} = 2$ и $b_{12} = 2$, $a_{21} = 1$, но $b_{21} = 3$. Следовательно, матрицы A и B неравны, т. е. $A \neq B$. Для матриц A и D, матриц одинаковой размерности, проверим выполнение равенств соответствующих элементов: $a_{11} = 1$ и $d_{11} = 1$, $a_{12} = 2$ и $d_{12} = 2$, $a_{21} = 1$ и $d_{21} = 1$, $a_{22} = 3$ и $d_{22} = 3$. Следовательно, матрицы A и D равны, т. е. $A = D$.

Ответ: $A = D$.

Тест 9. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$. Равными являются матрицы:

1) B и M;
2) D и K;
3) F и C;
4) A и D;
5) A и F.

Произведением матрицы A на число k или числа k на матрицу A называется матрица C, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число k. Обозначение: $C = A \cdot k$ (или $C = k \cdot A$).

Пример 9. Дано:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ k=2.$$

Найти произведение матрицы A на число k.

Решение

Произведение матрицы A на число k рассчитывается следующим образом:

$$C=k\cdot A=2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-2) & 2\cdot 0 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тест 10. Если матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, то $2\cdot A$ есть матрица:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Суммой матриц A и B одинаковой размерности называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B. Обозначение: $C = A + B$.

Пример 10. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти сумму матриц A и B.

Решение

Сравним размерности данных матриц. Матрица A имеет размерность 2×4, матрица B – 2×4. Так как размерности матриц одинаковы, то их сумма существует. Найдем ее:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2+1 & 1+1 & 1+(-2) & 1+1 \\ 0+1 & -2+1 & 1+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Тест 11. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Существует сумма матриц:

1) $A + B$;
2) $A + C$;
3) $A + D$;
4) $D + C$;
5) $B + C$.

Тест 12. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти среди следующих матриц матрицу, равную $A + B$:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

4) сумма не существует;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Разность двух матриц A и B одинаковой размерности определяется через предыдущие операции:

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Пример 11. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти разность матриц A и B.

Решение

Сравним размерности данных матриц. Матрица A имеет размерность 2×2, матрица B – 2×2. Так как размерности матриц одинаковы, то их разность существует. Найдем ее:

$$A - B = A + (-1) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Тест 13. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти среди следующих матриц матрицу, равную $A - B$:

1) (1; 1);

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) (0; 1);

4) разность не существует;

5) (0; –1).

Произведением матрицы A размерности m×n на матрицу B размерности n×k называется матрица C размерности m×k, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы и j-го столбца матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$; $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы (первого множителя) равно числу строк второй матрицы (второго множителя).

Тест 14. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Существует произведение матриц:

1) $A \cdot B$;
2) $B \cdot C$;
3) $C \cdot B$;
4) $B \cdot D$;
5) $D \cdot B$.

Получение элемента c_{ij} схематично изображено на рисунке 18.

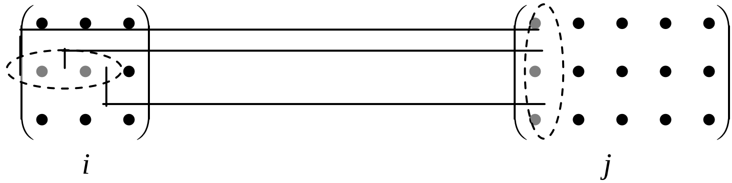


Рисунок 18

Пример 12. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
- $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, где A, B, C – матрицы, α – число.

Пример 13. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти: $A \cdot B$, $B \cdot A$.

Решение

Найдем размерности данных матриц. Матрица A имеет размерность 2×3, матрица B – 2×2. Произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A(3) не совпадает с числом строк матрицы B(2). Произведение $B \cdot A$ существует. Найдем его:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A \cdot B$ – не существует; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Тест 15. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Матрица $A \cdot B$ есть матрица:

1) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$;

5) произведение не существует.

Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т. е.

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\ раз}.$$

По определению полагают: $A^0 = E$, $A^1 = A$.

Операция возведения в степень обладает следующими свойствами:

- $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$;
- $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$, где A – матрица, m, k – числа.

Пример 14. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти A^3.

Решение

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 4\cdot 2 & 5\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 & 4\cdot 2 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$.

Тест 16. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Матрица A^2 есть матрица:

1) $\begin{pmatrix}7 & 10\\ 16 & 21\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}7 & 10\\ 14 & 20\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

5) не существует.

Транспонированием матрицы называется замена строк матрицы на ее столбцы с сохранением их порядка. Полученная при этом матрица называется транспонированной матрицей относительно исходной. Матрица, транспонированная относительно матрицы A, обозначается A^T.

Пример 15. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Найти матрицу A^T, транспонированную относительно матрицы A.

Решение

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Тест 17. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Найти среди следующих матриц матрицу, транспонированную относительно A:

1) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Введем обозначения: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $n \in N$; $0! = 1$.

Определителем матрицы A n-го порядка называется алгебраическая сумма $n!$ произведений n-го порядка элементов этой матрицы, причем в каждое произведение входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данной матрицы.

Обозначение: $|A|$.

Правила вычисления определителей:

1) матрицы первого порядка $|A| = |a_A| = a_{11}$;

2) матрицы A второго порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

3) матрицы A третьего порядка (правило Саррюса)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Пример 16. Вычислить определитель матрицы $A = (-1)$.

Решение

$$|A| = |-1| = -1.$$

Ответ: –1.

Пример 17. Вычислить определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 18. Вычислить определитель матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \cdot 4 - (2 \cdot 0 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \times$$

$$\times 1 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2)) = 0 + 36 - 20 - (0 + 30 + 6) = 16 - 36 = -20.$$

Ответ: –20.

Тест 18. Определитель матрицы $A = (7)$ равен:
1) 7;
2) –7;
3) 7^2;
4) 7^1;
5) 7^0.

Тест 19. Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ равен:

1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) 5.

Тест 20. Определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ равен:

1) 8;
2) 16;
3) 10;
4) 4;
5) 15.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Пример 19. Найти минор M_{32} элемента a_{32} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - (1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 1 +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 3) = 3 + 4 + 0 - (0 + 4 + 6) = 7 - 10 = -3.$$

Ответ: –3.

Тест 21. Минор M_{12} элемента a_{12} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ равен:

1) 1;
2) 2;
3) 3;
4) 4;
5) не существует.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется число, равное $(-1)^{i+j} Mij$.

Пример 20. Найти алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = (-1) \cdot 0 = 0.$$

Ответ: 0.

Тест 22. Алгебраическое дополнение A_{21} элемента a_{21} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ равно:

1) 2;
2) 3;
3) 1;
4) –2;
5) –3.

Теорема (о разложении определителя по строке (столбцу)). Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Пример 21. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (\text{раскладываем по четвертому столбцу}) = 4 \cdot A_{14} + 0 \times$$

$\times A_{24} + 0 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44} = 4 \cdot (-1)^{1+4} M_{14} + 0 + 0 + 0 = 4 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

= (раскладываем по второй строке) $= 4 \cdot (-1) \cdot (0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} =$

$= -4 \cdot (0 + 1 \cdot (-1)^{2+2} M_{22} + 2 \cdot (-1)^{2+3} M_{23}) = -4 \cdot \left(1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times\right.$

$\left. \times (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = -4 \cdot (1 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 2 \cdot (-1) \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1)) = -4 \times$

$\times (3 - 2) = -4 \cdot 1 = -4.$

Ответ: –4.

Тест 23. Разложение определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ по первой строке имеет вид:

1) $1 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12}$;
2) $1 \cdot A_{11} + 4 \cdot A_{22}$;
3) $1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12}$;
4) $1 \cdot A_{11} - 2 \cdot A_{12}$;
5) $1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{21}$.

Тест 24. Разложение определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ по второму столбцу имеет вид:

1) $1 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{12}$;
2) $2 \cdot A_{11} + 4 \cdot A_{22}$;
3) $2 \cdot A_{12} + 4 \cdot A_{21}$;
4) $1 \cdot A_{11} - 4 \cdot A_{22}$;
5) $2 \cdot A_{12} + 4 \cdot A_{22}$.

Матрица B называется *обратной* к матрице A, если $A \cdot B = B \cdot A = E$. Обозначение: $B = A^{-1}$.

Пример 22. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Используя определение обратной матрицы, выяснить, является ли матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ обратной к матрице A.

Решение

Проверим выполнение равенств $A \cdot B = E \cdot B \cdot A = E.$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot(-2) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, матрица B является обратной матрицей к матрице A.

Ответ: является.

Тест 25. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Используя определение обратной матрицы, выяснить, является ли матрица $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ обратной матрицей к матрице A:

1) является;
2) не является.

Тест 26. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Используя определение обратной матрицы, выяснить, является ли матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ обратной матрицей к матрице A:

1) является;
2) не является.

Теорема (о вычислении обратной матрицы). Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Обратная матрица A^{-1} имеет следующий вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & .... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .... & A_{n2} \\ ... & .... & .... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & .... & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 23. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Воспользуемся теоремой о вычислении обратной матрицы.

1. Найдем определитель матрицы $|A|$:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1$. Так как $|A| \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

2. $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Вычислим алгебраические дополнения:

- $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = |1| = 1;$
- $A_{21} = (-1)^{1+2}M_{21} = -M_{21} = -|3| = -3;$
- $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = -|1| = -1;$
- $A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = M_{22} = |2| = 2.$

Запишем A^{-1}, используя определение умножения матрицы на число:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-3) \\ (-1)\cdot(-1) & (-1)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+3\cdot 1 & (-1)\cdot 3+3\cdot 1 \\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 3+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 2+3\cdot 1 & (-1)\cdot 3+3\cdot 1 \\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 3+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Тест 27. Если для матрицы A второго порядка: $|A| = 3$, $A_{11} = 2$, $A_{12} = 4$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = -1$, то A^{-1} есть матрица, равная:

1) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

4) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $\frac{3}{1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Квадратичной формой n переменных x_1; x_2; …; x_n называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятым с некоторым коэффициентом.

Обозначение: $f(x_1; x_2; ...; x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

Пример 24. Указать, является ли сумма квадратичной формой от двух переменных:

а) $x_1 x_2 + x_1^2 - x_2^2$;

б) $2x_1 + x_1^2 + x_2^2$;

в) $2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 x_2$.

Ответ:

а) да;

б) нет (так как слагаемое $2x_1$ не является ни квадратом одной из переменных, ни произведением двух разных переменных, взятым с коэффициентом, равным 2);

в) да.

Предположим, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} – действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Матрица A n-го порядка, составленная из этих коэффициентов, называется *матрицей квадратичной формы*.

Пример 25. Дана квадратичная форма

$$f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 10x_1x_3 - 3x_3^2.$$

Найти матрицу A квадратичной формы.

Решение

Так как данная квадратичная форма f от трех переменных, то порядок матрицы A равен трем. Диагональные элементы этой матрицы равны коэффициентам при квадратах переменных, т. е. $a_{11} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = -3$, а другие элементы – половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы: $a_{12} = a_{21} = -6 \div 2 = -3$; $a_{13} = a_{31} = 10 \div 2 = 5$. Остальные элементы матрицы A равны нулю. Поэтому $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Тест 28. Дана квадратичная форма $f(x_1; x_2) = 4x_1^2 - x_1x_2$. Матрицей данной квадратичной формы является матрица:

1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Тест 29. Дана квадратичная форма

$$f(x_1;\, x_2) = 5x_1^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3 - x_2x_4.$$

Матрицей данной квадратичной формы является матрица:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Квадратичная форма $f(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ имеет канонический вид, если все ее коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$: $f(x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n) =$ $= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{mn}x_n^2$.

Пример 26. Указать, имеет ли квадратичная форма канонический вид:

а) $f(x_1;\, x_2;\, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_3$;

б) $f(x_1; x_2; x_3) = 5x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2$;

в) $f(x_1; x_2; x_3) = 4x_1^2 + x_3^2$;

г) $f(x_1; x_2; x_3) = 5x_1^2 + x_3^2 - x_2^2$;

д) $f(x_1; x_2) = x_2^2 + 5x_1x_3$.

Ответ: а) нет; б) да; в) да; г) да; д) нет.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Правильный ответ	3	4	1	5	1, 3, 4	4	1, 3, 4	2	5	2	2

Номер теста	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Правильный ответ	1	5	1, 2, 4, 5	1	3	4	1, 4	5	2

Номер теста	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Правильный ответ	3	4	3	5	1	2	3, 4	4	3

1.5. Системы линейных уравнений и неравенств

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где a_{ij} *и* b_i – действительные числа ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), которые называются соответственно *коэффициентами при неизвестных* и *свободными членами уравнений системы* (1).

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при неизвестных системы (1), называется *матрицей системы* (1).

Матрица-столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_3 \end{pmatrix}$, составленная из свободных членов уравнений системы (1), называется *столбцом свободных членов системы* (1).

Матрица системы (1), дополненная столбцом свободных членов системы (1), называется *расширенной матрицей системы* (1):

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Для системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 5, \\ -x_1 \qquad + x_3 = 7 \end{cases}$ матрица системы – $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, расширенная матрица системы – $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Тест 1. Для системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ матрица системы имеет вид:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Тест 2. Для системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ расширенная матрица системы имеет вид:

1) $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $A_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решением системы уравнений (1) называется упорядоченная совокупность n чисел (λ_1; λ_2; …; λ_n), при подстановке которых вместо x_1, x_2, …, x_n соответственно ($x_1 = \lambda_1$; $x_2 = \lambda_2$; …; $x_n = \lambda_n$) каждое уравнение системы (1) обращается в верное равенство.

Пример 2. Определить, является ли упорядоченная совокупность чисел (1; 3) решением системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 = -1, \\ -x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

Решение

Подставим в каждое уравнение данной системы вместо x_1 первое число из данной упорядоченной совокупности, а вместо x_2 – второе. Первое и второе уравнения обратятся в верные равенства

$$1 + 3 = 4,$$

$$2 \cdot 1 - 3 = -1.$$

А третье уравнение – нет: $-1 + 3 \neq 1$.

Следовательно, упорядоченная совокупность чисел (1; 3) не является решением данной системы линейных уравнений.

Ответ: нет.

Тест 3. Определить, является ли упорядоченная совокупность чисел (1; 2; 3) решением системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$:

1) да;

2) нет.

Тест 4. Определить, является ли упорядоченная совокупность чисел (0; –1) решением системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 = 1: \end{cases}$

1) да;
2) нет.

Система уравнений (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение; если система не имеет решений, она называется *несовместной*.

Теорема (правило Крамера). Пусть Δ – определитель матрицы системы n линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, …, x_n. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \ldots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta_j\,(j = \overline{1, n})$ – определитель, полученный из определителя Δ заменой в нем j-го столбца столбцом свободных членов системы.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$

Решение

1. Уравнений в системе – 2, а неизвестных – 3. Так как правило Крамера применимо только для систем, у которых число уравнений и число неизвестных совпадают, то данную систему решить по правилу Крамера нельзя.

Ответ: правило Крамера неприменимо.

2. Уравнений в системе – 2, неизвестных – 2. Матрица данной си-

стемы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Составим Δ – определитель матрицы системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Найдем его значение, используя правило вычисления определителей матрицы второго порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0$.

Так как $\Delta = 0$, то решить данную систему по правилу Крамера нельзя.

Ответ: правило Крамера неприменимо.

3. Уравнений в системе – 2, неизвестных – 2. Матрица данной системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Составим Δ – определитель матрицы системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

Найдем его значение, используя правило вычисления определителей матрицы второго порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -1 - 6 = -7 \neq 0$.

Итак, нам дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными и $\Delta \neq 0$. Значит, к данной системе правило Крамера применимо.

Применим его. Так как по правилу Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, найдем значения Δ_1 и Δ_2. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ заменой в нем 1-го столбца столбцом свободных членов системы. Столбец $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов системы. Следовательно, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = 1 - 8 = -7$.

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ заменой в нем 2-го столбца столбцом свободных членов системы. Следовательно,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 4 + 3 = 7.$$

Тогда: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-7}{-7} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{7}{-7} = -1$.

Ответ: $(1; -1)$.

Тест 5. При решении системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1+3x_2=5, \\ 4x_1-7x_2=8 \end{cases}$ по правилу Крамера определитель Δ имеет вид:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & -7 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$.

Тест 6. При решении системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1-5x_2=0, \\ x_1+2x_2=3 \end{cases}$ по правилу Крамера определитель Δ_1 имеет вид:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Тест 7. При решении системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1-5x_2=0, \\ x_1+2x_2=3 \end{cases}$ по правилу Крамера определитель Δ_2 имеет вид:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Тест 8. При решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2 по правилу Крамера получены значения: $\Delta = 4$, $\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 2$. Система имеет решение:

1) (8; 2);
2) ($\frac{1}{2}$; 2);
3) (4; 8; 2);
4) (8; 2; 4);
5) (2; $\frac{1}{2}$).

Тест 9. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$ по правилу Крамера:

1) (2; –1);
2) правило Крамера неприменимо;
3) (1; 2);
4) (2; 1);
5) (1; 1).

Тест 10. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ по правилу Крамера:

1) (2; –1);
2) правило Крамера неприменимо;
3) (1; 2);
4) (2; 1);

5) (1; 1).

Тест 11. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ по правилу Крамера:

1) (1; 1; 1);
2) (0; 1; 1);
3) (0; 0; 1);
4) (1; 0; 1);
5) правило Крамера неприменимо.

Две системы уравнений называются *эквивалентными*, или *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Тест 12. Ступенчатая система, эквивалентная исходной системе линейных уравнений, имеет вид $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ \quad\;\; 2x_2 = 2. \end{cases}$

Решением исходной системы является:

1) (0; 1);
2) (1; 2);
3) (2; 1);
4) (1; 1);
5) (–1; 0).

Тест 13. Ступенчатая система, эквивалентная исходной системе линейных уравнений, имеет вид $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5, \\ \qquad x_2 = 4. \end{cases}$

Решением исходной системы является:

1) (4; 9);
2) (4; 1);
3) (1; 4);
4) (9; 4);
5) (9; 1).

Линейным неравенством с двумя неизвестными x, y называется неравенство вида: $ax + by + c \le 0$ или $ax + by + c \le 0$, где a, b, c – действительные числа.

Решением линейного неравенства с двумя неизвестными x, y называется всякая упорядоченная пара действительных чисел (λ_1; λ_2), в результате подстановки которых вместо x, y соответственно неравенство превращается в верное числовое неравенство.

С геометрической точки зрения пару действительных чисел (λ_1; λ_2), являющуюся решением линейного неравенства с двумя неизвестными x, y, можно рассматривать как координаты точки плоскости Oxy.

Областью решений линейного неравенства с двумя неизвестными x, y называется множество точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют этому неравенству.

Теорема. Областью решений линейного неравенства с двумя неизвестными x, y вида $ax + by + c \geq 0$ служит одна из двух полуплоскостей, на которые всю плоскость Oxy делит прямая $ax + by + c = 0$, включая и эту прямую, а другая полуплоскость вместе с той же прямой является областью решений неравенства $ax + by + c \leq 0$.

Пример 4. Построить область решений неравенства $x + y + 2 \geq 0$.

Решение

$$x + y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y + 2 = 0, \\ x + y + 2 > 0. \end{array}\right.$$

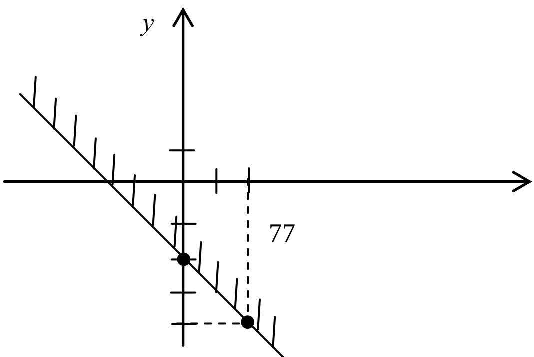
1. На плоскости Oxy построим прямую $x + y + 2 = 0$ по двум точкам (рисунок 19): если $x = 0$, то $y = -2$, имеем точку (0; –2); если $x = 2$, то $y = -4$, имеем точку (2; –4).

2. Возьмем произвольную точку, не лежащую на прямой $x + y + 2 = 0$.

Применяя теорему, имеем:

1) если координаты взятой точки удовлетворяют неравенству $x + y + 2 > 0$, то искомой будет полуплоскость, содержащая взятую точку;

2) если координаты взятой точки не удовлетворяют неравенству $x + y + 2 > 0$, то искомой будет полуплоскость, не содержащая взятую точку.



0 2 x

–2

–4 $x + y + 2 = 0$

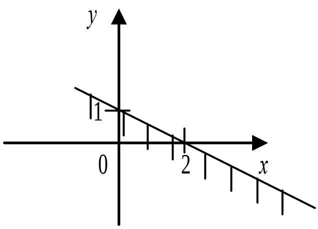
Рисунок 19

Возьмем, например, точку (0; 0). Подставим ее координаты в неравенство $x + y + 2 > 0$. Получим $0 + 0 + 2 > 0$ или $2 > 0$ – верное неравенство. Следовательно, искомой будет полуплоскость, содержащая точку (0; 0).

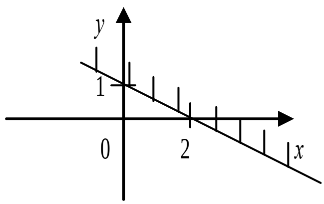
Теорема. Область решений системы линейных неравенств с двумя неизвестными есть пересечение (общая часть) полуплоскостей, каждая из которых есть область решения соответствующего неравенства системы.

Тест 14. Решением неравенства $x+\dfrac{1}{2}y-1\le 0$ является полуплоскость:

1)



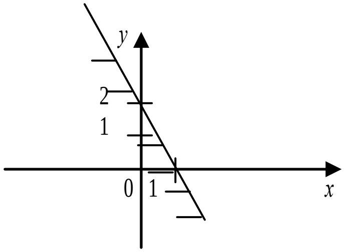
2)

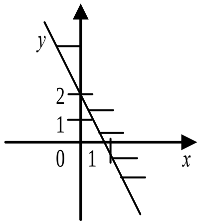


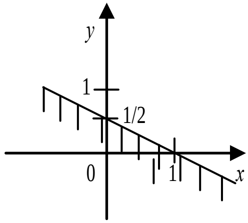
3)

4)

5)

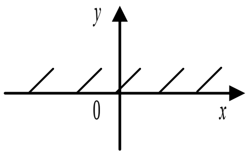




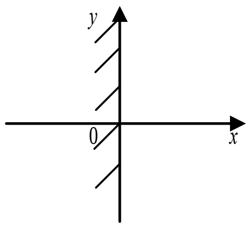


Тест 15. Решением неравенства $x \geq 0$ является полуплоскость:

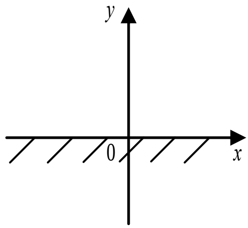
1)



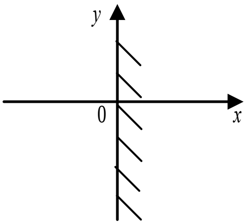
2)



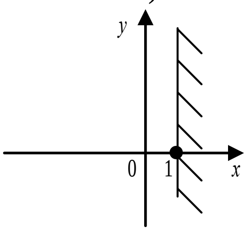
3)



4)



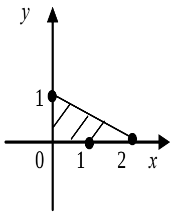
5)

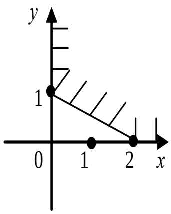


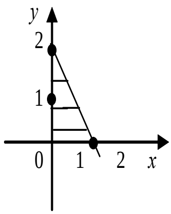
Тест 16. Решением системы линейных неравенств $\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y - 1 \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$

является часть плоскости:

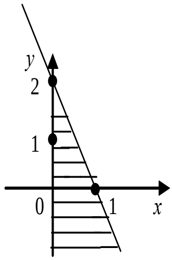
1) 2) 3)



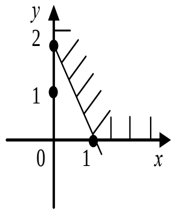




4)



5)



Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Правильный ответ	3	5	1	2	3	4	3	5	2

Номер теста	10	11	12	13	14	15	16
Правильный ответ	4	4	4	4	3	4	4

1.6. Комплексные числа

Комплексным числом z называется выражение вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – *мнимая единица*, $i^2 = -1$.

Если $a = 0$, то число $0 + bi = bi$ называется *чисто мнимым*; если $b = 0$, то число $a + 0i = a$ отождествляется с действительным числом a.

Таким образом, множество R всех действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т. е. $R \subset C$.

Для комплексного числа $z = a + bi$ число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $a = Re z$, а число b – *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $b = Im z$.

Пример 1. Для комплексного числа z определить $Re z$ и $Im z$:

а) $z = 2 + 5i$;

б) $z = 1 - 3i$;
в) $z = 2$;
г) $z = 5i$;
д) $z = i$.
Решение
а) $Rez = 2$, $Imz = 5$;
б) так как $z = 1 - 3i = 1 + (-3)i$, то $Rez = 1$, $Imz = -3$;
в) так как $z = 2 = 2 + 0i$, то $Rez = 2$, $Imz = 0$;
г) так как $z = 5i = 0 + 5i$, то $Rez = 0$, $Imz = 5$;
д) так как $z = i = 0 + 1i$, то $Rez = 0$, $Imz = 1$.

Тест 1. Мнимая часть Imz комплексного числа $z = 5 + 4i$ равна:
1) 9;
2) 5;
3) 4;
4) (–4);
5) 1.
Тест 2. Мнимая часть Imz комплексного числа $z = 7 - i$ равна:
1) 7;
2) 1;
3) 0;
4) (–1);
5) (–7).

Тест 3. Действительная часть Rez комплексного числа $z = -4i$ равна:
1) –4;
2) 0;
3) 4;
4) 1;
5) (–1).

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. В частности, комплексное число $z = a + bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a = b = 0$.

Пример 2. Указать, какие из комплексных чисел являются равными: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 2 + 5i$; $z_3 = 1 + 3i$; $z_4 = -1 + 3i$; $z_5 = 2 + 3i$.
Решение

Среди данных комплексных чисел выбираем сначала те, которые имеют равные действительные части: z_1, z_2, z_5. Так как при этом $Imz_1 = Imz_5 = 2$, $Imz_2 = 5$, то равными являются комплексные числа z_1 и z_5.

Ответ: $z_1 = z_5$.

Тест 4. Даны комплексные числа: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 4 - i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = -4 + i$; $z_5 = 4 + i$; $z_6 = 4 - i$; $z_7 = 2 - 3i$; $z_8 = 4 - i$; $z_9 = 3 - 2i$. Среди них равными являются:

1) $z_1 = z_3 = z_7 = z_9$;
2) $z_7 = z_9$;
3) $z_2 = z_5 = z_6 = z_8$;
4) $z_2 = z_4$;
5) $z_2 = z_6 = z_8$.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Пример 3. Указать число, сопряженное к комплексному числу $z = 7 - i$.

Решение

Сопряженным к данному комплексному числу будет комплексное число $\bar{z} = 7 + i$.

Ответ: $\bar{z} = 7 + i$.

Тест 5. Указать число, сопряженное к комплексному числу $z = 2 + 3i$:

1) $\bar{z} = 2 - 3i$;
2) $\bar{z} = -2 - 3i$;
3) $\bar{z} = -2 - 3i$;
4) $\bar{z} = 2 + 3i$;
5) $\bar{z} = 3 + 2i$.

Тест 6. Указать число, сопряженное к комплексному числу $z = 3i$:

1) $\bar{z} = 3i$;
2) $\bar{z} = 0$;
3) $\bar{z} = -3i$;
4) $\bar{z} = 1$;
5) $\bar{z} = -1$.

Запись числа z в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i; \quad (1)$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i. \quad (2)$$

Пример 4. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 4 - 3i$. Найти их сумму и разность.

Решение

В соответствии с формулами (1), (2) при $a = 2$, $b = 1$, $c = 4$, $d = -3$ получаем

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (4 - 3i) = 2 + i + 4 - 3i = (2 + 4) + (1 - 3)i = 6 - 2i;$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (4 - 3i) = 2 + i - 4 + 3i = (2 - 4) + (1 + 3)i = -2 + 4i.$$

Ответ: $6 - 2i$; $-2 + 4i$.

Тест 7. Сумма комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - 2i$ равна:
1) $4 - i$;
2) $3 - i$;
3) $5 + i$;
4) 5;
5) $3 + i$.

Тест 8. Разность комплексных чисел $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 4 - 2i$ равна:
1) $-1 - i$;
2) $1+ i$;
3) $1 - 3i$;
4) $-1 + 3i$;
5) $1 - i$.

Рассмотрим плоскость с декартовой прямоугольной системой координат Oxy. Всякое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой $M(a; b)$ на плоскости Oxy такой, что $a = Rez$, $b = Imz$. И, наоборот, каждую точку $M(a; b)$ координатной плоскости Oxy можно рассматривать как образ комплексного числа $z = a + bi$ (рисунок 20).

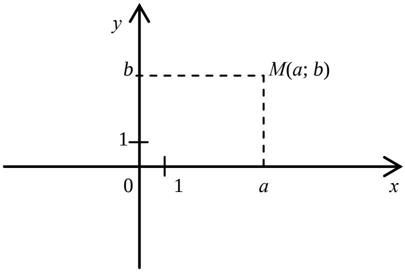


Рисунок 20

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней изображены действительные числа $z = a + 0i = a$. Ось ординат называется *мнимой осью*, так как на ней изображены чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + bi = bi$.

Пример 5. На комплексной плоскости изобразить число $z = 2 - 3i$.

Решение

Для данного комплексного числа $a = Rez = 2$, $b = Imz = -3$. На координатной плоскости Oxy (рисунок 21) число $z = 2 - 3i$ изображается точкой $M(2; -3)$.

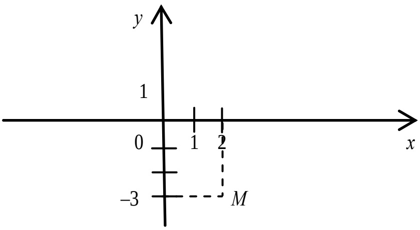


Рисунок 21

Комплексное число $z = a + bi$, заданное в алгебраической форме, можно представить и в другом виде. Изобразим число z точкой $M(a; b)$ комплексной плоскости. Рассмотрим радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ этой точки (рисунок 22).

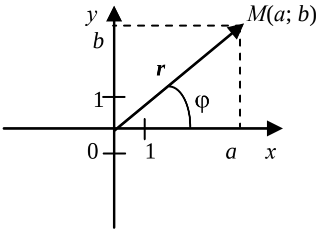
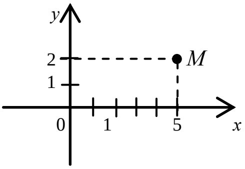


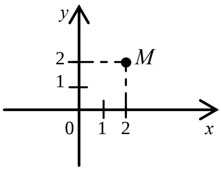
Рисунок 22

Тест 9. Указать, на какой комплексной плоскости точка M является изображением комплексного числа $z = -5 + 2i$:

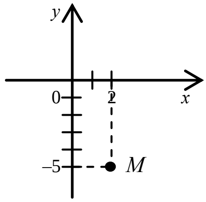
1)



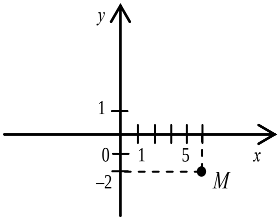
2)



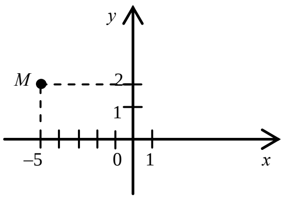
3)



4)

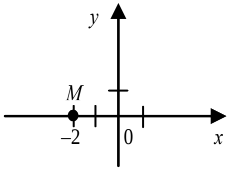


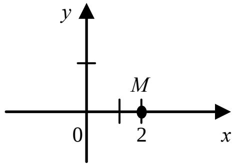
5)

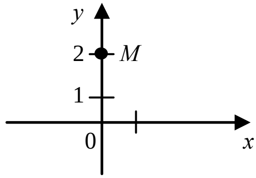


Тест 10. Указать, на какой комплексной плоскости точка M является изображением комплексного числа $z = -2i$:

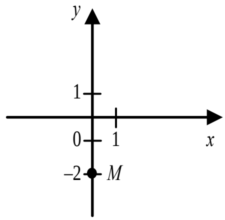
1) 2) 3)



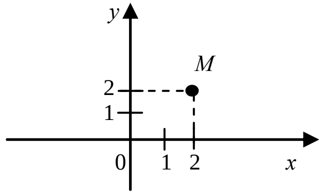




4)



5)



Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ точки $M(a;\, b)$, изображающей данное число.

Обозначение: $|z|$ или r.

Из прямоугольного треугольника OMa (рисунок 22) по теореме Пифагора $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Следовательно, $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ или $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 6. Найти модуль комплексного числа $z = 1 - 3i$.

Решение

Для данного комплексного числа $a = 1$, $b = -3$. Следовательно,

$|z| = |1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$

Ответ: $\sqrt{10}$.

Тест 11. Модуль комплексного числа $z = 4 + 3i$ равен:

1) 25;
2) 5;
3) 7;
4) 49;
5) 24.

Тест 12. Модуль комплексного числа $z = -i$ равен:

1) –1;
2) 0;
3) 1;
4) 2;
5) 5.

Тест 13. Модуль комплексного числа $z = 4$ равен:
1) –1;
2) 0;
3) 1;
4) 4;
5) 2.

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется величина угла φ (рисунок 22) между положительным направлением действительной оси Ox и вектором $\boldsymbol{r}$, изображающим комплексное число. Обозначение: $\arg z$ или φ.

Аргумент (главное значение аргумента) комплексного числа заключен в промежутке $[0; 2\pi)$.

Множество аргументов числа z обозначается $\mathrm{Arg}z$ и $\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$.

С помощью модуля r и аргумента φ комплексное число $z = a + bi$ можно представить в другом виде. Так как $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ (рисунок 22), то $z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi i$ или $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{4}$$

Запись числа $z = a + bi$ в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r – модуль, а φ – аргумент числа z, называется *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Пример 7. Представить комплексное число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение

$z = -1 + i$ – алгебраическая форма комплексного числа z, при этом $a = -1$, $b = 1$. Применяя формулы (3), (4), находим $r = \sqrt{a^2 + b^2} =$

$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\varphi \in [0; 2\pi)$, то $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа z имеет вид

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Ответ: $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Тест 14. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ имеет вид:

1) $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

2) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

5) $\dfrac{\pi}{4}\left(\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Тест 15. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = -1$ имеет вид:

1) $1(\cos\pi + i\sin\pi)$;

2) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$;

3) $\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$;

4) $(\cos\pi + i\sin\pi)$;

5) $\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π, т. е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}$.

Пример 8. Указать, какие из комплексных чисел являются равными: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$z_3 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$, $z_4 = -2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение

Среди данных комплексных чисел выбираем сначала те, которые имеют равные модули: z_1, z_3, z_4. Так как $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_3 = \frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4}+2\pi$, $\varphi_4 = \frac{3\pi}{4}$, то равными являются комплексные числа z_1 и z_3.

Ответ: $z_1 = z_3$.

Тест 16. Даны комплексные числа $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $z_2 =$
$= -4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$, $z_3 = 4\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$, $z_4 =$
$= 4\left(\cos\frac{21\pi}{5}+\ +i\sin\frac{21\pi}{5}\right)$. Среди них равными являются:

1) $z_1 = z_2$;
2) $z_1 = z_3$;
3) $z_1 = z_4$;
4) $z_2 = z_3$;
5) $z_3 = z_4$.

Формула Эйлера имеет следующий вид:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (5)$$

Данная формула может быть записана в виде

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует

$$\cos\ \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Используя формулу (5), комплексное число $z = r(\cos\ \varphi + i\sin\ \varphi)$ можно записать в виде $z = re^{i\varphi}$, называемом *показательной* (*или экспоненциальной*) *формой* комплексного числа z.

Пример 9. Представить комплексное число $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ в показательной форме.

Решение

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа z, при этом $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому показательная форма данного числа z имеет вид $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Ответ: $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Тест 17. Показательная форма комплексного числа $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ имеет вид:

1) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$;

2) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$;

3) $e^{i\frac{\pi}{4}}$;

4) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$;

5) $4e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Тест 18. Показательная форма комплексного числа $z = -1 + i$ имеет вид:

1) $\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

2) $\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

3) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

4) $\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$;

5) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Правильный ответ	3	4	2	5	1	3	2	4	5
Номер теста	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Правильный ответ	4	2	3	4	2	4	3	1	3

Раздел II. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Числовая последовательность и ее предел

Действительные числа. Числовые множества

Свойства действительных чисел

Рассмотрим действительные числа. Сначала в процессе счета возникает так называемый натуральный ряд чисел 1, 2, 3, …, n, … . В арифметике вводятся действия сложения и умножения над натуральными числами. Что же касается операций вычитания и деления, то они уже оказываются не всегда возможными во множестве натуральных чисел. Чтобы все четыре арифметические операции были возможны для любой пары чисел (кроме операции деления на ноль, которой нельзя приписать разумного смысла), приходится расширить класс рассматриваемых чисел. К необходимости такого расширения запаса чисел приводят также потребности измерения тех или иных геометрических и физических величин. Поэтому вводятся число ноль и целые *отрицательные* числа (вида –1, –2, …, –n, …), а затем и *рациональные* (вида $\frac{p}{q}$, где p и q – целые, $q \neq 0$). Та же потребность измерения величин и проведения таких операций, как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений, приводит к дальнейшему расширению запаса рассматриваемых чисел: появляются *иррациональные* и, наконец, *комплексные* числа. Все рациональные и все иррациональные числа образуют множество всех действительных чисел.

Множество действительных чисел обозначается через R (от лат. *realus* – действительный). Это множество образует совокупность, в которой определены взаимосвязанные операции сложения, умножения и сравнения чисел по величине и которая обладает определенного рода непрерывностью.

Свойства действительных чисел следующие:

1. *Операция сложения*. Для любой упорядоченной пары действительных чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их суммой и обозначаемое через $a + b$, так, что при этом имеют место следующие свойства:

• Для любой пары чисел a и b

$$a + b = b + a.$$

Это свойство называется *переместительным*, или *коммутативным законом сложения.*

• Для любой тройки чисел a, b и c

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Это свойство называется *сочетательным*, или *ассоциативным законом сложения.*

• Существует число, обозначаемое 0 и называемое нулем, такое, что для любого числа a

$$a + 0 = a.$$

• Для любого числа a существует число, обозначаемое $-a$ и называемое *противоположным данному*, такое, что

$$a + (-a) = 0.$$

2. *Операция умножения*. Для любой упорядоченной пары чисел a и b определено, и притом единственным образом, число, называемое их произведением и обозначаемое ab, так, что при этом имеют место следующие свойства:

• Для любой пары чисел a и b

$$ab = ba.$$

Это свойство называется *переместительным*, или *коммутативным законом умножения*.

• Для любой тройки чисел a, b и c

$$a(bc) = (ab)c.$$

Это свойство называется *сочетательным*, или *ассоциативным законом умножения*.

• Существует число, обозначаемое 1 и называемое единицей, такое, что для любого числа a

$$a \cdot 1 = a.$$

• Для любого числа $a \neq 0$ существует число, обозначаемое $\frac{1}{a}$ и называемое *обратным данному*, такое, что

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

3. *Связь операций сложения и умножения*. Для любой тройки чисел a, b и c

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Это свойство называется *распределительным*, или *дистрибутивным законом умножения относительно сложения.*

4. *Упорядоченность*. Для каждого числа a определено одно из соотношений $a > 0$, $a = 0$ или $a < 0$, при этом, если $a > 0$, $b > 0$, то

$$a + b > 0,$$
$$ab > 0.$$

Тест 1. Указать, какое из чисел является натуральным:
1) 376;
2) $\sqrt{24}$;
3) $3i - 2$;
4) 0;
5) –3.

Тест 2. Указать, какое из чисел не является действительным:
1) 36
2) $\sqrt{24}$;
3) $3i - 2$;
4) 0;
5) $\frac{2}{3}$.

Тест 3. Переместительный закон умножения не выполняется для множества:
1) целых чисел;
2) действительных чисел;
3) матриц;
4) комплексных чисел.

Тест 4. Противоположным для числа 2 является число:
1) –2;
2) $\frac{1}{2}$;
3) 2^{-1};
4) $\sqrt{2}$.

Тест 5. Обратным для числа 4 является число:
1) –4;
2) $\frac{1}{4}$;
3) 4^{-1};
4) $\sqrt{4}$.

Числовые последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел: 1, 2, 3, …, $n-1$, n, … .

Если заменить каждое натуральное число n в этом ряду некоторым числом a_n, следуя некоторому закону, то получим новый ряд чисел:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ \ldots,$$

кратко обозначаемый $\{a_n\}$ и называемый *числовой последовательностью*. Величина a_n называется общим членом числовой последовательности. Обычно числовая последовательность задается некоторой формулой $a_n = f(n)$ позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n; эта формула называется формулой общего члена. Заметим, что задать числовую последовательность формулой общего члена не всегда возможно; иногда последовательность задается путем описания ее членов.

По определению, последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов: любые два разных ее элемента отличаются, по крайней мере, своими номерами, которых бесконечно много.

Числовая последовательность является частным случаем функции. Последовательность является функцией, определенной на множестве натуральных чисел и принимающей значения в множестве действительных чисел, т. е. функцией вида $f : N \to R$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого $n \in N$ $a_n \langle a_{n+1} (a_n \rangle a_{n+1})$. Такие последовательности называются *строго монотонными*.

Иногда в качестве номеров удобно использовать не все натуральные числа, а лишь некоторые из них (например, натуральные числа, начиная с некоторого натурального числа n_0). Для нумерации также возможно использование не только натуральных, но и других чисел, например, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (здесь в качестве еще одного номера к множеству натуральных чисел добавлен ноль). В таких случаях, задавая последовательность, указывают, какие значения принимают номера n.

Если в некоторой последовательности для любого $n \in N$ $a_n \langle a_{n+1} (a_n \rangle a_{n+1})$, то последовательность называется *неубывающей* (*невозрастающей*). Такие последовательности называются *монотонными*.

Пример 1. Числовая последовательность 1, 2, 3, 4, 5, … является рядом натуральных чисел и имеет общий член $a_n = n$.

Пример 2. Числовая последовательность 2, 4, 6, 8, 10, … является рядом четных чисел и имеет общий член $a_n = 2n$.

Пример 3. 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, … − числовая последовательность приближенных значений с увеличивающейся точностью.

В последнем примере невозможно дать формулу общего члена последовательности.

Пример 4. Записать первых 5 членов числовой последовательности по ее общему члену $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$. Для вычисления a_1 нужно в формулу для общего члена a_n вместо n подставить 1, для вычисления a_2 – 2 и т. д. Тогда имеем: $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}$.

Тест 6. Общим членом последовательности 1, 2, 6, 24, 120, … является:

1) $a_n = 2^{2n}$;
2) $a_n = 3n - 1$;
3) $a_n = 2n - 2$;
4) $a_n = n!$.

Тест 7. Общим членом последовательности $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{64}, \dfrac{1}{256}, \cdots$ является:

1) $a_n = \dfrac{1}{2n}$;
2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$;
3) $a_n = \dfrac{1}{4^{n-1}}$;
4) $a_n = \dfrac{1}{4^n}$.

Тест 8. Общим членом последовательности $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \cdots$ является:

1) $a_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$;

2) $a_n = \frac{2n}{2n-1}$;

3) $a_n = \frac{2^n}{3^n}$;

4) $a_n = \frac{2n-1}{3n}$.

Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу A при увеличении порядкового номера n. В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет предел. Это понятие имеет более строгое определение.

Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \tag{1}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, зависящее от ε, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > n_0$.

Это определение означает, что A есть предел числовой последовательности, если ее общий член неограниченно приближается к A при возрастании n. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число n_0, что, начиная с $n > n_0$, все члены последовательности расположены внутри интервала $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; в противном случае – *расходящейся*.

Числовая последовательность может иметь только один предел (конечный или бесконечный) определенного знака.

Пример 5. Гармоническая последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ имеет пределом число 0. Действительно, для любого интервала (–ε; +ε) в качестве номера N_0 можно взять какое-либо целое число, больше $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда для всех $n > n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ имеем $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Пример 6. Последовательность 2, 5, 2, 5, … является расходящейся. Действительно, никакой интервал длины, меньшей, например, единицы, не может содержать всех членов последовательности, начиная с некоторого номера.

Последовательность называется *ограниченной*, если существует такое число M, что $|a_n| \le M$ для всех n. Всякая сходящаяся последовательность ограничена. Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел. Всякая сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Пример 7. Последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей и ограниченной. Она имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Число e называется *числом Эйлера* и приблизительно равно 2,718 28.

Тест 9. Последовательность 1, 4, 9, 16, … является:
1) сходящейся;
2) расходящейся;
3) ограниченной;
4) арифметической прогрессией;
5) геометрической прогрессией.

Тест 10. Последовательность $\{2n + 1\}$ является:
1) сходящейся;

2) расходящейся;
3) ограниченной;
4) арифметической прогрессией;
5) геометрической прогрессией.

Тест 11. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ не является:

1) сходящейся;
2) расходящейся;
3) ограниченной;
4) гармонической.

Тест 12. Предел последовательности, заданной общим членом $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, равен:

1) 1;
2) 0;
3) e;
4) π.

Свойства сходящихся последовательностей

Для нахождения пределов можно воспользоваться их некоторыми свойствами.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B,\ c = \text{const}$, то:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = A + B; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = A - B; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c\cdot A; \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A\cdot B; \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}, \text{ если все } b_n \neq 0 \text{ и } B \neq 0. \tag{6}$$

Пример 8. Найти предел последовательности, общий член которой

$$a_n = \left(\frac{6n-1}{2n+3}\right).$$

Решение

Разделим числитель и знаменатель дроби на n. Перейдя к пределу по формулам 2–6, получим:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 6n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{6-1/n}{2+3/n} = \frac{6-0}{2+0} = \frac{6}{2} = 3.$$

Здесь принято во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n} = 0$ (c = const) и предел постоянной равен самой постоянной.

Пример 9. Найти предел последовательности, общий член которой

$$a_n = \frac{3n+2}{5n^2+4n-1}.$$

Решение

Разделим числитель и знаменатель дроби на n. Перейдя к пределу по формулам 2–6, получим:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n^2+4n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3/n + 2/n^2}{5+4/n - 1/n^2} = \frac{0+0}{5+0-0} = \frac{0}{5} = 0.$$

Тест 13. Пределом последовательности с общим членом $a_n = \left(\frac{n+1}{5n+3}\right)$ является:

1) 1;

2) 0;

3) ∞;

4) $\frac{1}{5}$;

5) нет правильного ответа.

Тест 14. Пределом последовательности с общим членом $a_n = \left(\dfrac{3n^2 + n - 5}{3n^2 - 2} \right)$ является:

1) 1;
2) 0;
3) 3;
4) $\dfrac{1}{3}$;
5) нет правильного ответа.

Тест 15. Пределом последовательности с общим членом $a_n = \left(\dfrac{2n^2 + n - 6}{n^3 + 1} \right)$ является:

1) 6;
2) 0;
3) ∞;
4) 2;
5) нет правильного ответа.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого числа ε существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, зависящий от ε, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$ и говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом $+\infty(\infty)$. Бесконечно большие последовательности не имеют предела в том смысле, как он был определен выражением (1), обозначающим конечный предел. Термин «сходящаяся последовательность» употребляется только для последовательностей, имеющих конечный предел.

Бесконечно малой последовательностью называется последовательность, имеющая своим пределом ноль, т. е. для которой выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если последовательность $\{a_n\}$, в которой все $a_n \neq 0$, является бесконечно малой, то последовательность $\left\{\frac{1}{|a_n|}\right\}$ является бесконечно большой. Для бесконечно большой последовательности $\{a_n\}$, где $a_n \neq 0$, последовательность $\left\{\frac{1}{|a_n|}\right\}$ является бесконечно малой.

Пример 10. Примером бесконечно малой последовательности может служить гармоническая последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Пример 11. Последовательность 1, 4, 9, …, n^2, … является бесконечно большой, так как для числа $P = 10^5$ в качестве номера n_0 можно взять число 10^3.

Тест 16. Последовательность, заданная общим членом $a_n = \left(\frac{2n^2 + n - 6}{n^3 + 1}\right)$:

1) бесконечно малая;
2) бесконечно большая;
3) не имеет предела;
4) монотонно возрастает.

Тест 17. Последовательность, заданная общим членом $a_n = \left(\frac{3n^3 - 2}{2n^2 + 1}\right)$:

1) бесконечно малая;
2) бесконечно большая;
3) имеет конечный предел;
4) монотонно убывает.

Тест 18. Указать, какая из предложенных последовательностей является бесконечно большой:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$;

2) $\left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$;

3) $\left\{\dfrac{1000}{n}\right\}$;

4) $\left\{\dfrac{n}{1000}\right\}$.

Тест 19. Последовательность 0, 1, 0, 1, … :
1) имеет конечный предел;
2) не имеет предела;
3) имеет бесконечный предел;
4) является монотонной.

Тест 20. Последовательность $\left\{\dfrac{3}{n-2}\right\}$:
1) является бесконечно большой;
2) является бесконечно малой;
3) монотонно возрастает;
4) не имеет предела.

Тест 21. Последовательность $\left\{\dfrac{3n+1}{5}\right\}$:
1) имеет конечный предел;
2) не имеет предела;
3) имеет бесконечный предел;
4) является монотонно убывающей;
5) иной ответ.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Правильный ответ	1	2	3	1	2	4	3	1	2	2, 4	2	3	4

Номер теста	14	15	16	17	18	19	20	21
Правильный ответ	1	2	1	2	4	2	2	3

2.2. Предел функции одной переменной

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств. Под множествами будут пониматься числовые множества, т. е. множества, состоящие из действительных чисел.

Определение. Если каждому элементу x из некоторого множества X поставлен в соответствие по определенному правилу f некоторый единственный элемент y из множества $У$ (рисунок 23), то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$, $x \in X$.

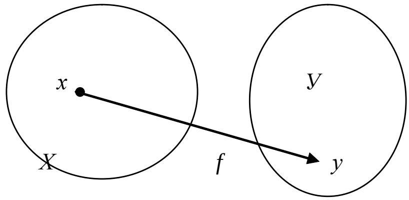


Рисунок 23

Элемент x называется независимой переменной, или аргументом, а y – зависимой, или функцией.

Множество X называется областью определения данной функции и обозначается $D(f)$, а $У$ – множеством (областью) значений функции и обозначается $E(f)$.

Задать функцию f – значит указать, как по каждому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции $f(x)$. Существуют три основных способа задания функций: аналитический, графический, табличный.

Аналитический способ заключается в том, что зависимость между переменными величинами определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия нужно выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Пример 1. Формула $y = x^2$ задает функцию, областью определения которой является числовая прямая $(-\infty; +\infty)$, а множеством значений – полупрямая $[0; +\infty)$ (рисунок 24). Формула $y = \sqrt{1-x^2}$ задает функцию, областью определения которой является отрезок $[-1; 1]$, а множеством значений – отрезок $[0; 1]$ (рисунок 25).

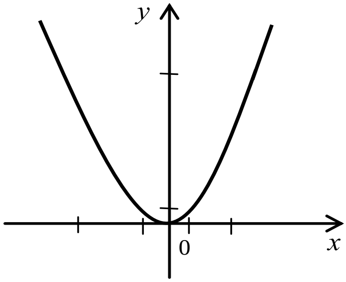


Рисунок 24

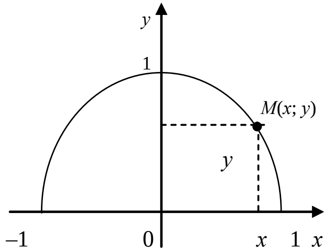


Рисунок 25

При *графическом способе* задается график функции.

Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции y, соответствующие тем или иным значениям аргумента x, непосредственно находятся из этого графика.

Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

При *табличном способе* функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции (например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы).

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ в прямоугольной системе координат Oxy называется множество всех точек, плоскости с координатами $(x; y)$, $x \in D(f)$.

Например, графиком функции $y = \sqrt{1-x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 1$ с центром в $O(0; 0)$ (рисунок 25).

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ – на множестве D_1, причем для $\forall\, x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда на множестве D_1 определена функция $u = f(\varphi(x))$, которая называется *сложной функцией* от x (или *функцией от аргумента*, или *суперпозицией* заданной функции).

Переменную $u = \varphi(x)$ называют промежуточным аргументом сложной функции.

Например, функция $y = \sin 2x$ есть суперпозиция двух функций $y = \sin u$ и $u = 2x$.

Основными элементарными функциями называют следующие:

1. Постоянная функция $y = c$, c – const.

2. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, α – любое действительное число.

3. Показательная функция $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$.

4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$.

5. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

6. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Функцию, аналитическое выражение которой можно получить при помощи конечного числа арифметических операций над основными элементарными функциями, а также при помощи операции взятия функции от функции, назовем *элементарной функцией*.

Определение. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа ε[1] (хотя бы и сколь угодно малого) можно найти такое положительное число δ[2] (вообще говоря, зависящее от ε; $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех значений x, входящих в область определения функции, отличных от a и удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta \tag{1}$$

имеет место неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если число A является пределом функции $f(x)$ в точке a, то этот факт символически записывают следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

С помощью логических символов определение имеет вид

---

[1] ε – эпсилон

[2] δ – дельта

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$$
$$\forall x \in D(f),\ x \neq a\left(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Отметим, что неравенства $x \neq a,\ |x-a| < \delta$ можно записать в виде

$$0 < |x-a| < \delta.$$

Данное определение называют определением предела функции по Коши[1], или «на языке $\varepsilon - \delta$».

Смысл определения предела функции $f(x)$ в точке a состоит в том, что для всех значений x, достаточно близких к a, значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине).

Пример 2. Пользуясь определением Коши, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем число $\delta(\varepsilon)$, такое, что для всех x из промежутка $0 < |x-1| < \delta$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon.$

Поскольку $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| = \left|\dfrac{(x-1)^2}{x-1}\right| = |x-1| < \varepsilon$ для всех $x \neq 1$, то в качестве $\delta(\varepsilon)$ мы можем взять ε.

Итак, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ мы нашли число $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, такое, что для всех x из промежутка $0 < |x-1| < \delta(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon.$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Следует заметить, что нахождение пределов функций, пользуясь определением предела по Коши, чаще всего затруднительно. Поэтому позже укажем некоторые приемы нахождения предела функции.

Если при стремлении x к a переменная x принимает лишь значения, меньшие a, или наоборот, лишь значения, большие a, и при этом

---

[1] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик

функция $f(x)$ стремится к некоторому числу A, то говорят об односторонних пределах функции $f(x)$ соответственно слева $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Определение этих пределов будет аналогично рассмотренному выше при $x \to a$.

Здесь вместо значений x, удовлетворяющих условию (1), при которых верно неравенство (2), необходимо рассматривать значения x, такие, что $a - \delta < x < a$ при $x \to a - 0$ (слева), или значения x, такие, что $a < x < a + \delta$ при $x \to a + 0$ (справа).

Замечание. Если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Если в точке a функция $f(x)$ имеет конечные левый и правый пределы и они равны между собой, то это число является пределом функции в точке a.

Пример 3. Найти односторонние пределы функции

$f(x) = \begin{cases} x^2, \ \textit{если}\, x \le 3, \\ x + 7, \ \textit{если}\, x > 3 \end{cases}$ в точке $a = 3$ (рисунок 26).

Решение

Вычислим

$$\lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} x^2 = 9;$$

$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} (x + 7) = 10.$$

Так как односторонние пределы существуют, то $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) \ne \lim\limits_{x \to 3+0} f(x)$ в точке $a = 3$ функция предела не имеет.

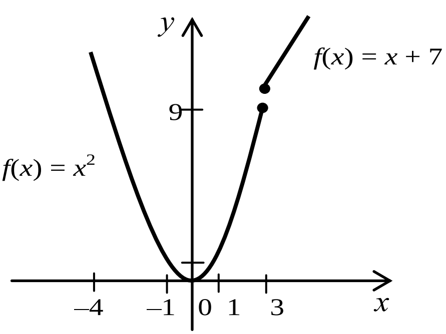


Рисунок 26

Кроме рассмотренных понятий предела функции при $x \to a$ и односторонних пределов существует также понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $S > 0$ (зависящее от ε), что для всех x, таких, что $|x| > S,$ верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (3)$$

Предел функции $f(x)$ в бесконечности обозначается

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ или } f(x) \to A \text{ при } x \to \infty.$$

С помощью логических символов определение имеет вид

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists S = S(\varepsilon) > 0 \ \forall x : |x| > S \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Смысл определения состоит в том, что при достаточно больших по модулю значениях x значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A (по абсолютной величине).

Пример 4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Решение

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Найдем такое число $S(\varepsilon)$, что для всех x, таких, что $|x| > S,$ верно неравенство $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$ Преобразуем последнее неравенство, получим $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$ или $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}.$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $S = \frac{1}{\varepsilon} > 0,$ что для всех x, таких, что $|x| > S,$ будет верно неравенство $|f(x) - 0| < \varepsilon,$ где $f(x) = \frac{1}{x}.$ Это означает, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$

Вычисление пределов значительно упрощается, если использовать ряд утверждений.

Свойства пределов следующие:

1) предел постоянной равен самой постоянной, т. е. $\lim\limits_{x \to a} c = c;$

2) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x),$ если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют;

3) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x),$ если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют;

4) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},$ если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют и $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0;$

5) постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е. $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x).$

Теорема. Предел элементарной функции в точке a, принадлежащей ее области определения, равен значению данной функции в рассматриваемой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a).$

Теорема. Если $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A,$ $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0,$ то предел сложной функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A.$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 + 3x^2 + 4x + 2).$

Решение

Воспользовавшись свойствами 1, 2, 5, получим:

$$\lim_{x \to 2}\left(x^3 + 3x^2 + 4x + 2\right) = \lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 3x^2 + \lim_{x \to 2} 4x + \lim_{x \to 2} 2 =$$

$$=\lim_{x\to 2} x^3+3\cdot\lim_{x\to 2} x^2+4\cdot\lim_{x\to 2} x+2=2^3+3\cdot 2^2+4\cdot 2+2=30.$$

Тест 1. Предел $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+5x+7)$ равен:

1) 5;
2) 7;
3) 31;
4) 1;
5) 15.

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение

Так как здесь отыскивается предел частного, то, прежде чем применить соответствующее свойство 4, надо проверить, не обращается ли в нуль знаменатель дроби при $x\to 3$.

Применив свойства 1, 2, 5, будем иметь:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2+2x+8\right)=\lim_{x\to 3} x^2+2\cdot\lim_{x\to 3} x+\lim_{x\to 3} 8=3^2+2\cdot 3+8=23\neq 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x+2)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x+8)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3} x^2+\lim\limits_{x\to 3} x+\lim\limits_{x\to 3} 2}{23}=$$

$$=\frac{3^2+3+2}{23}=\frac{14}{23}.$$

Тест 2. Предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x+3}{2x-3}$ равен:

1) 5;
2) 4;
3) 31;
4) 1;
5) 15.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Аналогично формулируются определения при $x \to \infty$.

Заметим, что если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой (бесконечно большой) при $x \to a$ $(x \to \infty)$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая (бесконечно малая) при $x \to a$ $(x \to \infty)$.

Пример 7. Функция $f(x) = \sin x$ при $x \to 0$ является бесконечно малой, так как $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Пример 8. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ – бесконечно большая, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Неопределенности. Если вычисление пределов приводит к неопределенным выражениям вида $\left[\dfrac{0}{0}\right], \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty], [1^\infty], [0 \cdot \infty]$, необходимо провести дополнительные исследования, т. е. раскрывать неопределенности.

Раскрыть неопределенность – значит найти предел соответствующего выражения, если он существует.

Методика раскрытия неопределенностей изложена ниже.

• *Первый замечательный предел.* Если угол u выражен в радианах, то $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$; $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{\sin u} = 1$.

Многие задачи нахождения пределов приводят к использованию первого замечательного предела.

Первый замечательный предел можно применять в ряде случаев для раскрытия неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Решение

Предел знаменателя равен нулю, нулю равен и предел числителя.

Для нахождения данного предела умножим числитель и знаменатель на 5 с целью получения отношения синуса к его аргументу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5.$$

Тест 3. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{5x}$ равен:

1) $\dfrac{7}{5}$;

2) $\dfrac{5}{7}$;

3) 7;

4) 5;

5) $\dfrac{1}{5}$.

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Решение

Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Следовательно, предварительно преобразуем данное выражение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}.$$

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}$.

Решение

Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Следовательно, предварительно преобразуем данное выражение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=$$

$$= 1 \cdot 1 = 1.$$

Замечание. Можно доказать, что

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{tg}u}=1;\ \lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\arcsin u}=1.$$

Тест 4. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{tg}5x}$ равен:

1) $\frac{5}{3}$;
2) $\frac{3}{5}$;
3) 3;
4) 5;
5) 1.

• *Второй замечательный предел.* $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$

где e – иррациональное число, называемое числом Л. Эйлера.

Оно играет большую роль в математике так же, как и число π(e = 2,718 281 828 459 045 235 3 …).

Логарифмы с основанием e называются натуральными и обозначаются $\log_e x=\ln x$.

С помощью второго замечательного предела раскрывают неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Пример 12. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{2x}$.

Решение
Выполним некоторые преобразования

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3+x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-2x}=e^{3\cdot(-2)}=e^{-6}.$$

Пример 13. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2(3x+1)}{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2\cdot(3x+1)}{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6x+2}{2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{6+\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}}=\left[\text{при } x\to\infty,\ \frac{2}{x}\to 0,\ \frac{1}{x}\to 0\right]=e^{\frac{6+0}{2-0}}=e^{3}.$$

Тест 5. Предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ равен:

1) ∞;
2) e^3;
3) e;
4) e^2;
5) 1.

Основные приемы раскрытия неопределенностей приведены ниже.

1. *Раскрытие неопределенности вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$. Неопределенное выражение вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ получаем при нахождении $\lim_{x\to x_0} f(x),\ x_0\notin D(f),$ если $f(x)$ является дробью.

Способы раскрытия неопределенности зависят от вида $f(x)$.

• Пусть $f(x)$ – рациональная дробь.

В этом случае числитель и знаменатель дроби разлагают на множители.

Пример 14. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^3}{x^3+2x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{x^3+2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot(x+1)}{x^2\cdot(x+2)}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{x+1}{x+2}=0.$$

Пример 15. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}$.

Решение

Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель на множители, воспользовавшись формулой

$$ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Тогда,

$$2-x-x^2=-x^2-x+2=-(x+2)\cdot(x-1);$$

$$2-3x+x^2=x^2-3x+2=(x-2)\cdot(x-1).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{2-3x+x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-x-2}{x-2}=3.$$

Тест 6. Предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(3x+2)}{(4-x)\cdot 15}$ равен:

1) $-\dfrac{14}{15}$;

2) $\dfrac{15}{14}$;

3) $\dfrac{14}{15}$;

4) 15;

5) 2.

• Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая иррациональные выражения.

В этом случае умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю или знаменателю, а иногда и к тому и другому (избавляемся от иррациональности), с целью применения формул сокращенного умножения:

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2;$$

$$(a-b)\cdot(a^2+a\cdot b+b^2)=a^3-b^3;$$

$$(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)=a^3+b^3.$$

(множители слева – сопряженные выражения).

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{\sqrt{4+5}+3}=\frac{2}{3}.$$

• Пусть $f(x)$ – дробь, содержащая тригонометрические функции.

Для раскрытия неопределенности в этом случае используют первый замечательный предел.

Пример 17. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot 4}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

2. *Раскрытие неопределенности вида* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Пусть следует найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены n-й и m-й степени соответственно.

В этом случае необходимо руководствоваться следующим:

Пусть

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n;$$

$$Q_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m,$$

где a_i и b_i – некоторые постоянные.

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m},\ \textit{если } m=n,\\ 0,\ \textit{если } n<m,\\ \infty,\ \textit{если } n>m.\end{cases}$$

Таким образом, для раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ целесообразно числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень x из числа слагаемых одночленов числителя и знаменателя, а затем перейти к пределу.

Пример 18. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}$.

Решение

Разделим числитель и знаменатель на x^2, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x^2}}{5+\dfrac{2}{x}}=\left[\text{при } x\to\infty,\ \frac{1}{x^2}\to 0,\ \frac{2}{x}\to 0\right]=\frac{3}{5}.$$

Однако, так как степень многочлена числителя $(n=2)$ равна степени многочлена знаменателя (m = 2), то можно было записать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\dfrac{3}{5}$.

Пример 19. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+2x+4}{x^3+8}$.

Решение

Степень многочлена числителя (n = 7) больше степени многочлена знаменателя (m = 3), следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+2x+4}{x^3+8}=\infty$.

Тест 7. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^4-5x^3+2x-1\right)$ равен:

1) ∞;
2) –5;
3) 3;
4) $-\infty$;
5) 2.

Тест 8. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x-4}$ равен:

1) $\dfrac{3}{2}$;
2) $\dfrac{2}{3}$;
3) 0;
4) 5;
5) –4.

3. *Раскрытие неопределенности вида* $[0\cdot\infty]$. Неопределенное выражение вида $[0\cdot\infty]$ сводится к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Методику раскрытия этой неопределенности покажем на примере.

Пример 20. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(\operatorname{tg}x+4x)$.

Решение

Имеем неопределенность $[0\cdot\infty]$. Преобразовав данное выражение, получим неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(\operatorname{tg}x+4x)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}+4\right)=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1-\text{\textit{доказано выше}}\right]=1+4=5.$$

4. *Раскрытие неопределенности вида* $[\infty-\infty]$. Неопределенное выражение вида $[\infty-\infty]$ раскрывается путем преобразования соответствующих выражений и сведения их к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 21. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$.

Решение

Выполним преобразование и получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=-2\cdot 0=0.$$

5. *Раскрытие неопределенности вида* $\left[1^{\infty}\right]$. Неопределенное выражение вида $\left[1^{\infty}\right]$ получаем при вычислении пределов

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (\varphi(x))^{\psi(x)},$$

$$\text{если } \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1, \text{ а } \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \infty.$$

В этом случае для раскрытия неопределенности применяют второй замечательный предел.

Пример 22. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x} = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}5} = e^5.$$

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8
Правильный ответ	3	2	1	2	2	1	1	1

2.3. Непрерывные функции одной переменной

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Это определение содержит следующие четыре условия непрерывности:

1) $y = f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности точки x_0;

2) должны существовать конечные пределы $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ (пределы справа и слева – односторонние пределы);

3) односторонние пределы должны быть одинаковыми;

4) эти пределы должны быть равны $f(x_0)$.

Если не выполняется хотя бы одно из условий 1–4, то функция имеет разрыв в точке x_0.

Функция непрерывна в точке x_0 справа, если выполняется условие

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

В противном случае функция имеет разрыв в точке x_0 справа.

Функция непрерывна в точке x_0 слева, если имеет место равенство

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

В противном случае функция имеет разрыв в точке x_0 слева.

Из условий 2–4 следует, что если функция непрерывна в точке x_0, то она непрерывна в этой же точке справа и слева.

Критерий непрерывности функции

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0.$$

Пример 1. Доказать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ непрерывна в точке $x = 4$.
Доказательство. Найдем значение функции в точке $x = 4$, $f(4) = 15$.
Вычислим предел:

$$\lim_{x\to 4}(x^2-1)=\lim_{x\to 4}x^2-\lim_{x\to 4}1 = 16 - 1 = 15.$$

Получили, что предел функции в точке $x = 4$ равен значению функции в этой точке. Это означает, что условие непрерывности функции в точке выполнено, следовательно, данная функция непрерывна в точке $x = 4$.

Пример 2. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & при\, x\neq 0, \\ 0 & при\, x=0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x = 0$.

Доказательство. По условию $f(0) = 0$. Произведение $x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ есть бесконечно малая величина как произведение бесконечно малой x на ограниченную величину $\sin\frac{1}{x}$ $\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1\right)$. Предел бесконечно малой равен нулю, следовательно,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Получили, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$ т. е. данная функция непрерывна в точке $x = 0$.

Пример 3. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2 & при\, x\le 1, \\ 0 & при\, x>1 \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 1$.

Доказательство. Значение функции в точке $x = 1$ есть $f(1) = 1$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2 = 2.$$

Получили, что в точке $x = 1$ предел слева не равен пределу справа, т. е. в этой точке предела не существует и функция при $x = 1$ имеет разрыв (рисунок 27).

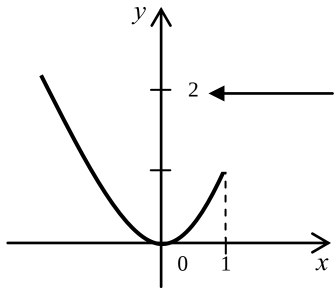


Рисунок 27

Тест 1. Функция $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x-3}$:

1) имеет одну точку разрыва;

2) имеет две точки разрыва;
3) является непрерывной.

Тест 2. Функция $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$:
1) имеет одну точку разрыва;
2) имеет две точки разрыва;
3) является непрерывной.

Тест 3. Точкой разрыва функции $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$ является:
1) 1;
2) 2;
3) –1;
4) –2.

Тест 4. Точками разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2-16}{9-x^2}$ являются:
1) 4, 3;
2) 16, 9;
3) 4, –4;
4) 3, –3.

Тест 5. Точкой разрыва функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ является:
1) 1;
2) 2;
3) 0;
4) нет точек разрыва.

Тест 6. Точкой разрыва функции $f(x)=\begin{cases} 3x & при\, x \le 2, \\ 5x+1 & при\, x > 2 \end{cases}$ является:
1) 5;
2) 2;
3) 3;
4) нет точек разрыва.

Точки разрыва функции и их классификация

Если условия непрерывности функции в точке x_0 не выполнены, т. е. в точке x_0 существует конечный предел, не равный значению функции в этой точке, либо равный бесконечности, либо вообще не существует, то говорят, что функция имеет разрыв в этой точке.

Различают точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода. Если функция в точке x_0 имеет конечные пределы слева и справа, из которых хотя бы один не равен $f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой разрыва *первого рода* функции $f(x)$, а величина $\left| f(x_0+0) - f(x_0-0) \right|$ – *скачком* функции в точке x_0. Если при этом $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x)$, то точка x_0 называется *устранимой* точкой разрыва функции $f(x)$, так как, заменяя ее значение x_0 в точке x_0 общим значением $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, получим непрерывную функцию.

Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0), f(x_0+0)$ равен бесконечности или не существует, то x_0 называется точкой разрыва *второго рода* функции $f(x)$.

Пример 4. Функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ непрерывна как отношение двух непрерывных функций. Полагая $f(0) = 1$ в соответствии с пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, получим функцию $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \textit{если } x \neq 0, \\ 1, & \textit{если } x = 0, \end{cases}$ непрерывную и в точке $x = 0$.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Решение

Функция элементарная, определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел, за исключением точки $x = 2$. В этой точке функция имеет разрыв. Найдем предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$, отсюда $f(2 + 0) = f(2 – 0) = 4$.

Таким образом, в точке $x = 2$ функция имеет устранимый разрыв 9 (рисунок 28). Если эту функцию доопределить в точке $x = 2$, положив

$f(2) = 4$, то она будет непрерывной на всей числовой прямой. В этом случае говорят, что функцию $f(x)$ доопределили по непрерывности в точке $x = 2$.

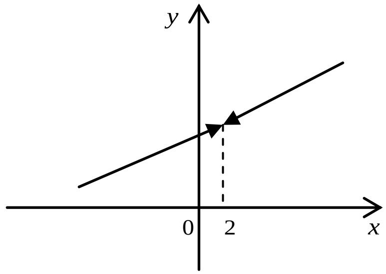


Рисунок 28

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & если\ x \neq 0, \\ 0, & если\ x = 0. \end{cases}$$

Решение

Функция имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$ с обеих сторон, так как $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Тест 7. Функция $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$:

1) имеет разрыв первого рода;
2) имеет разрыв второго рода;
3) является непрерывной.

Тест 8. Функция $f(x) = \begin{cases} x-1 & при\ x \leq 3, \\ \dfrac{1}{2x} & при\ x > 3 \end{cases}$:

1) имеет разрыв первого рода;
2) имеет разрыв второго рода;
3) является непрерывной.

Тест 9. Функция $f(x) = \begin{cases} x^3 & при\, x \le 3, \\ x+2 & при\, x > 3: \end{cases}$

1) имеет разрыв первого рода;
2) имеет разрыв второго рода;
3) является непрерывной.

Тест 10. Функция $f(x) = \begin{cases} 3x & при\, x \le 2, \\ 5x+1 & при\, x > 2 \end{cases}$ в точке $x = 2$:

1) имеет устранимый разрыв первого рода;
2) имеет разрыв первого рода;
3) имеет разрыв второго рода;
4) является непрерывной.

Тест 11. Функция $f(x) = \begin{cases} 3x & при\, x \le 2, \\ 5x+1 & при\, x > 2 \end{cases}$ в точке $x = 0$:

1) имеет устранимый разрыв первого рода;
2) имеет устранимый разрыв второго рода;
3) имеет разрыв второго рода;
4) является непрерывной.

Рассмотрим свойства функций, непрерывных в точке:

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их алгебраическая сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $f(x) / g(x)$ (при условии $g(x) \ne 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > 0$.

3. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ – в точке x_0, $\varphi(x_0) = u_0$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве M, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке отрезка $(a < x < b)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Рассмотрим свойства функций, непрерывных на отрезке:

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

2. Теорема Вейерштрасса: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M.

3. Теорема Больцано-Коши: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения противоположных знаков, то для некоторого $x_0 \in (a; b)$ $f(x_0) = 0$.

Тест 12. Функция $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-3}$ является непрерывной на отрезке:

1) [–5; 0];
2) [0; 5];
3) [–2; 2];
4) [1; 10];
5) имеет разрыв на каждом из указанных отрезков.

Тест 13. Функция $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ является непрерывной на отрезке:

1) [–5; 0];
2) [0; 5];
3) [–1; 0];
4) [1; 10].

Тест 14. Функция $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x+1}$ является непрерывной на отрезке:

1) [–5; 0];
2) [2; 5];
3) [–2; 0];
4) [–10; 10].

Тест 15. Функция $f(x) = \dfrac{x^2-16}{9-x^2}$ является непрерывной на отрезке:

1) [–5; 0];
2) [0; 5];
3) [–5; 5];
4) [5; 9].

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Правильный ответ	1	2	3	4	3	2	2	1	1	2	4

Номер теста	12	13	14	15
Правильный ответ	5	3	2	4

2.4. Производная и дифференциал функции одной переменной

Определение и геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Тогда приращению Δx независимой переменной x соответствует приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю. Обозначение производной: $f'(x)$, или y'_x, или y':

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.* Функция $y = f(x)$, которая имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* на этом промежутке.

Тест 1. Указать, какое из нижеперечисленных предложений определяет производную функции (когда приращение аргумента стремится к 0):

1) отношение приращения функции к приращению аргумента;
2) предел отношения функции к приращению аргумента;
3) отношение функции к пределу аргумента;
4) отношение предела функции к аргументу;
5) предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

Теорема. Если функция у = $f(x)$ в точке х имеет производную $f'(x)$, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно. Функция может быть непрерывна в точке, но не иметь в ней производной. Например, функция $y = |x-1|$ в точке x = 1 непрерывна, но не имеет в ней производной.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции y = $f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Правила дифференцирования и таблица производных

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ − две дифференцируемые в некотором интервале функции.

Теорема 1. Производная алгебраической суммы двух дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x).$$

Теорема 2. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений каждой функции на производную другой

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(C\cdot u(x))' = C\cdot u'(x).$$

Теорема 3. Производную частного двух дифференцируемых функций можно найти по формуле

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{v^2(x)},$$

где $v(x)\neq 0$.

Все основные элементарные функции являются дифференцируемыми и имеют производные:

1) $C' = 0$, C – постоянная;

2) $x' = 1$;

3) $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1}$, α – постоянная;

4) $(a^{u})' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$;

5) $(e^{u})' = e^{u}$;

6) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

7) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

8) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

9) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

10) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

11) $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

12) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Пример 1. Найти производную функции $y = \lg x - 8 \operatorname{tg} x$.

Решение

$$y' = (\lg x - 8\operatorname{tg} x)' = (\lg x)' - (8\operatorname{tg} x)' = (\lg x)' - 8(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{x \ln 10} - \frac{8}{\cos^2 x}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = x^3(x-1)$.

Решение

$$y' = (x^3(x-1))' = (x^3)' \cdot (x-1) + x^3 \cdot (x-1)' = 3x^2(x-1) +$$
$$+ x^3 \cdot 1 = 3x^3 - 3x^2 + x^3 = 4x^3 - 3x^2.$$

Пример 3. Найти производную функции $y=\dfrac{e^x}{\sin x}$.

Решение

$$y'=(\frac{e^x}{\sin x})'=\frac{(e^x)'\sin x-(\sin x)'e^x}{(\sin x)^2}=\frac{e^x\cdot\sin x-(\cos x)'e^x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}.$$

Тест 2. Производная функции $y=2x^2+\cos x$ равна:

1) $2x+\sin x$;
2) $x^4+\sin x$;
3) $4x-\sin x$;
4) $4x\cos x+x^2\sin x$;
5) $2x-\sin x$.

Тест 3. Производная функции $y=\dfrac{e^x}{x}$ равна:

1) $\dfrac{e^x}{x^2}$;

2) $\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}$;

3) $\dfrac{x}{e^x}$;

4) $\dfrac{e^x x+x}{x^2}$;

5) $\dfrac{e^x-x}{x^2\cdot e^x}$.

Производная сложной функции

Есть функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$.

Функция, заданная формулой $y = f(\varphi(x))$, называется *сложной функцией*.

Пример 4. Функция $f(x) = 2^{x^2+1}$ – сложная: $f(u) = 2^u$, $u = \varphi(x) = x^2 + 1$.

Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $f(u)$ – в точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже дифференцируема и справедлива теорема, представленная ниже.

Теорема. Производную сложной функции $y = f(\varphi(x))$ можно найти по формуле

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Пример 5. Найти производную функции $y = (3x^2 - 1)^5$.

Решение

Пусть $3x^2 - 1 = u$, тогда $y = u^5$.

По теореме о производной сложной функции

$$y' = (u^5)' = 5u^4;$$

$$u' = (3x^2 - 1)' = 6x.$$

Тогда $y' = 5(3x^2 - 1)^4 6x = 30x(3x^2 - 1)^4$.

Тест 4. Производная функции $y = \sin(2x + 5)$ равна:

1) $2\cos(2x + 5)$;
2) $\cos 2x + \cos 5$;
3) $\cos(2x + 5)$;
4) $(2x + 5)\cos(2x + 5)$;
5) $\sin(2x + 5)\cos(2x + 5)$.

Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная и возрастающая на $[a; b]$. Значит, на этом промежутке она имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на $[a; b]$ и в точке $x_0 \in [a; b]$ имеет производную $f'(x_0)$, то обратная функция $x = \varphi(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ которую можно найти по формуле $\varphi'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, т. е. производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Пример 6. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y=\sqrt[3]{(x-1)}$.

Решение

Находим обратную функцию. Так как $y=\sqrt[3]{(x-1)}$, то $y^3 = x - 1$. Значит, $x = y^3+1$. Обратная функция $x = y^3+1$ имеет производную $x'_y=3y^2$. Следовательно, $y'=\dfrac{1}{x'_y}=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем результат продифференцировать. Такую операцию называют *логарифмическим дифференцированием*.

Пример 7. Найти производную функции $y=x^{\sin x}$.

Решение

Логарифмируя данное равенство по основанию e, получаем $\ln y=\sin x\cdot\ln x$. Дифференцируя полученное равенство, находим

$$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}, \text{ откуда } y'=y(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}).$$

Подставляем $y=x^{\sin x}$ и получаем $y'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x})$.

Дифференцирование неявных функций

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y, то функция задана в явном виде.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x;\, y) = 0$, неразрешенного относительно y. Например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y-x=0$.

Для нахождения производной неявной функции необходимо продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x, и затем полученное уравнение разрешить относительно y'.

Пример 8. Найти производную функции y, заданную уравнением $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение

Функция y задана неявно. Дифференцируем по x равенство $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$$3x^2+3\cdot y^2\cdot y'-3(x'\cdot y+x\cdot y')=0,$$
$$x^2+y^2y'-y-xy'=0,$$
$$y^2y'-xy'=y-x^2.$$

Из последнего соотношения следует, что $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

Производная высших порядков

Производная $y'=f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция x и называется *производной первого порядка*.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y'' или $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' или $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется *производная от производной* $(n-1)$ *порядка*: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Пример 9. Найти вторую производную функции $y=\sin^2 x$.

Решение

Находим первую производную функции

$$y' = (\sin^2 x)' = ((\sin x)^2)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Дифференцируем еще раз

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x.$$

Тест 5. Производная третьего порядка функции $y = 8x^2$ равна:

1) $16x$;
2) $(16x)^3$;
3) $3 \cdot 8x^2$;
4) $(8x^2)^3$;
5) 0.

Применение производной в экономике

В экономике широко применяется понятие эластичности функции. *Эластичностью функции* $y = f(x)$ относительно переменной x называется величина

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)} f'(x).$$

Эластичность функции характеризует процент прироста зависимой переменной, соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

Пример 10. Найти эластичность функции $y = x^3 + 2$.

Решение

Применяя формулу $E_x(y) = \dfrac{x}{f(x)} f'(x)$, находим

$$E_x(y) = \frac{x}{x^3+2}(x^3+2)' = \frac{x}{x^3+2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^3}{x^3+2}.$$

В частности, если, например, $x = 2$, то $E_x(y) = \dfrac{3 \cdot 8}{8+2} = 2{,}4.$ Это значит, что если переменная x возрастает на 1%, то переменная y увеличивается на 2,4%.

Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dy или $df(x): dy = f'(x)\Delta x,$ или $dy = f'(x)dx$, так как $dx = \Delta x$. Из второй формулы следует, что $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

При достаточно малых Δx справедлива приближенная формула

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \text{ или } f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Данная формула часто используется в приближенных вычислениях.

Пример 11. Найти дифференциал функции $y = 3x^2 - \sin 2x.$

Решение

По формуле $dy = f'(x)dx$ находим

$$dy = (3x^2 - \sin 2x)'dx = (6x - 2\cos 2x)dx.$$

Тест 6. Дифференциал функции $y = e^{2x}$ равен:

1) $e^{2x}dy;$
2) $(e^{2x})'dy;$
3) $2e^{x}dx;$
4) $2e^{x\text{-}1}dx;$
5) $2e^{2x}dx.$

Пример 12. Найти дифференциал функции $y = x^2 + 2x + 2$ в точке $x = 1$.

Решение

По формуле $dy = f'(x)dx$ находим

$$dy = (x^2 + 2x + 2)'dx = (2x+2)dx = 2(x+1)dx.$$

Подставим $x = 1$ в dy и получим

$$dy = 2(1+1)dx = 4dx.$$

Тест 7. Дифференциал dy функции $y = \ln 2x$ в точке $x = 3$ равен:

1) $\dfrac{1}{3}dx$;

2) $\dfrac{1}{6}dx$;

3) $\ln 6\, dx$;

4) $\dfrac{1}{3\ln 2}dx$;

5) $\dfrac{1}{2^3}dx$.

Пример 13. Найти приближенное значение $\sin 29^\circ$.

Решение

Нам известно значение $\sin 30^\circ$, равное $\dfrac{1}{2}$. Воспользуемся им и формулой $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. В качестве Δx следует взять радианную меру 1°, т. е. величину $\dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$ со знаком «минус». Имеем

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x,\quad x = 30^\circ = \frac{\pi}{6},\ \Delta x = -\frac{\pi}{180}.$$

Поэтому получаем, что

$$\sin 29^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0{,}4849.$$

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7
Правильный ответ	5	3	2	1	5	5	1

2.5. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; b)$ и в некоторой точке $c \in (a; b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда, если в точке c существует производная, то она равна нулю: $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: так как $f'(c) = 0$, то касательная к графику функции в точке M, абсцисса которой равна c, параллельна оси Ox (рисунок 29).

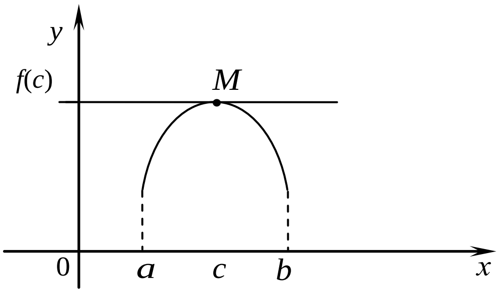


Рисунок 29

Замечания:

1. По условию теоремы функция определена в интервале $(a; b)$. В этом промежутке все точки внутренние. Таким образом, точка c взята *внутри промежутка X*.

2. Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на конце промежутка, например, в точке a промежутка $X = [a; b]$, и в этой точке существует конечная односторонняя производная, то она может не равняться нулю.

Пример 1. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = x^2$ условиям теоремы Ферма на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Решение

Функция определена на интервале $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$.

На концах отрезка функция принимает наибольшее и наименьшее значения: при $x = 0$ функция принимает наименьшее значение: $f(0) = 0^2 = 0$; при $x = \frac{1}{2}$ – наибольшее значение: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Условие теоремы не выполнено, поскольку наибольшее (наименьшее) значение функция должна принимать *внутри промежутка,* а не на его концах.

В результате, хотя функция в точке $x = \frac{1}{2}$ принимает наибольшее значение и имеет конечную производную: $f'(x) = 2x$, производная в этой точке отлична от нуля: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \neq 0$.

Пример 2. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = x^2$ условиям теоремы Ферма на отрезке $\left[-1;\ \frac{1}{2}\right]$.

Решение

Функция определена на интервале $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$.

При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение: $f(0) = 0^2 = 0$. Это наименьшее значение функция принимает внутри интервала.

Функция $y = x^2$ в точке $x = 0$ имеет конечную производную: $f'(x) = 2x$, которая в этой точке равна нулю: $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

Таким образом, теорема Ферма применима к функции $y = x^2$ на отрезке $\left[-1;\ \frac{1}{2}\right]$.

Тест 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a;\ b)$ и в некоторой точке $c \in (a;\ b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда, если в точке c существует производная, то:

1) $f'(c) = -1$;
2) $f(c) = 0$;

3) $f'(c) = a$;
4) $f(c) = b$;
5) $f'(c) = 0$.

Тест 2. Теорема Ферма применима, если:

1) функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; b)$;

2) функция $y = f(x)$ в некоторой точке $c \in (a; b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение;

3) функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; b)$ и в некоторой точке $c \in (a; b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение;

4) функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; b)$ и в некоторой точке $c \in (a; b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение, причем, в точке c существует конечная производная $f'(c)$;

5) в точке $c \in (a; b)$ существует конечная производная $f'(c)$.

Тест 3. Условиям теоремы Ферма на отрезке $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ удовлетворяет функция:

1) $y = x$;
2) $y = x^2$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
4) $y = \ln x$;
5) $y = \mathrm{tg}\, x$.

Теорема Ролля

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a; b)$;

3) на концах интервала принимает равные значения, т. е. $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$, в которой производная равна нулю: $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на его концах одинаковые значения, существует точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox (рисунок 30).

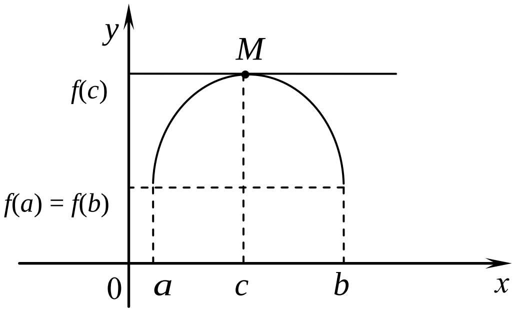


Рисунок 30

Пример 3. Проверить, удовлетворяет ли функция $y = x - x^3$ условиям теоремы Ролля на отрезке [0; 1].

Решение

Функция удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке [0; 1];

2) дифференцируема на интервале (0; 1): $f'(x) = 1 - 3x^2$;

3) на концах отрезка принимает равные значения: $f(0) = f(1) = 0$.

Тогда внутри отрезка [0; 1] должна существовать по крайней мере одна точка $c \in (0; 1)$, в которой производная равна нулю: $f'(c) = 0$.

Действительно, такая точка существует: $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, внутри отрезка [0; 1] существует точка $c_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, где производная равна нулю: $f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$.

Следовательно, функция $y = x - x^3$ на отрезке [0; 1] удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Тест 4. Теорема Ролля применима, если функция $y = f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a; b)$;

3) на концах интервала принимает равные значения, т. е. $f(a) = f(b)$;

4) непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$;

5) непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах интервала принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тест 5. У графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на его концах одинаковые значения, существует точка, в которой касательная к графику функции:

1) параллельна оси Ox;
2) параллельна оси Oy;
3) образует с осью Ox угол α, тангенс которого: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$;
4) образует с осью Oy угол α, тангенс которого: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$;
5) не существует.

Тест 6. Условиям теоремы Ролля на отрезке [0; 1] удовлетворяет функция:

1) $y = x$;
2) $y = x^2$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
4) $y = \ln x$;
5) $y = x - x^3$.

Теорема Лагранжа

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2) дифференцируема на интервале $(a; b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна точка $c \in [a; b]$, в которой выполняется равенство

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \qquad (1)$$

Геометрический смысл теоремы: на кривой $y = f(x)$ всегда найдется хотя бы одна точка M с абсциссой, равной c, такая, что касательная, проведенная к кривой в этой точке, будет параллельна хорде, стягивающей дугу AB (рисунок 31).

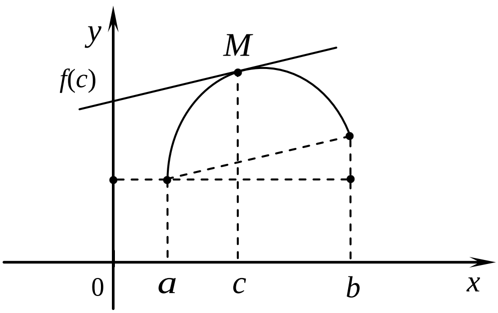


Рисунок 31

Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Формулу (1) называют *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*.

Пример 4. Проверить, может ли быть применима теорема Лагранжа для функции $y = \sqrt[3]{1-x^2} + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение

Функция не определена при $x = 0 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, следовательно, не является непрерывной на данном отрезке, т. е. первое условие теоремы не выполняется и на данном отрезке теорема Лагранжа не применима.

Пример 5. Проверить, может ли быть применима теорема Лагранжа для функции $y = \sqrt[3]{1-x^2} + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Решение

1. Функция непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

2. Проверяем выполнение второго условия теоремы: найдем производную функции

$$y' = \left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}} - \frac{1}{x^2}.$$

Производная не существует при $x = 0$ и при $x = 1$.

В частности, производная не существует в точке $x = 1 \in \left[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right]$.

Таким образом, второе условие теоремы не выполняется и на данном отрезке теорема Лагранжа не применима.

Пример 6. Проверить, может ли быть применима теорема Лагранжа для функции $y = \sqrt[3]{1-x^2} + \frac{1}{x}$ на отрезке $\left[-\frac{5}{2};\ -\frac{3}{2}\right]$.

Решение

Функция удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $\left[-\frac{5}{2};\ -\frac{3}{2}\right]$;

2) дифференцируема на интервале $\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$.

Таким образом, оба условия теоремы выполняются и на данном отрезке теорема Лагранжа применима.

Тест 7. Теорема Лагранжа применима, если функция $y = f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;

2) дифференцируема на интервале $(a; b)$;

3) непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$;

4) на концах интервала принимает равные значения: $f(a) = f(b)$;

5) непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах интервала принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.

Теорема Коши

Теорема. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) непрерывны на отрезке $[a; b]$;

2) дифференцируемы на интервале $(a; b)$;

3) $\varphi'(x) \neq 0$ во всех точках интервала $(a; b)$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2}$$

Формулу (2) называют *формулой конечных приращений Коши.*

Замечание. Из условия теоремы следует, что $\varphi(a)\neq\varphi(b)$.

Пример 7. Проверить, может ли быть применима теорема Коши для функций $f(x) = x^3$ и $\varphi(x) = x^2$ на отрезке [0; 2].

Решение

Функции удовлетворяют следующим условиям:

1) непрерывны на отрезке [0; 2];

2) дифференцируемы на интервале (0; 2): $f'(x)=3x^2$ и $\varphi'(x)=2x$; при $x=0$ производные обращаются в нуль: $f'(0)=3\cdot 0^2=0$ и $\varphi'(0)=2\cdot 0=0$, но внутри промежутка производные обеих функций отличны от нуля;

3) каждая из функций, например, $y = \varphi(x)$, имеет неравные значения на концах отрезка [0; 2]

$$\varphi(0)=0^2=0;\ \ \varphi(2)=2^2=4,\ \text{т. е. }\ \varphi(0)\neq\varphi(2).$$

Таким образом, все условия теоремы Коши на данном отрезке выполняются. Следовательно, теорема Коши на данном отрезке применима.

Тест 8. Теорема Коши применима, если функции $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$:

1) непрерывны на отрезке [a; b];

2) дифференцируемы на интервале (a; b);

3) $\varphi'(x)\neq 0$ во всех точках интервала (a; b);

4) непрерывны на отрезке [a; b], дифференцируемы на интервале (a; b), $\varphi'(x)\neq 0$ во всех точках интервала (a; b);

5) непрерывны на отрезке [a; b] и дифференцируемы на интервале (a; b).

Правило Лопиталя

Применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема. Пусть имеем частное двух функций $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в промежутке $X = (a; b)$, имеют конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ в этом промежутке, причем $\varphi'(x) \neq 0$. Тогда, если обе функции бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a + 0$, т. е. если частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a + 0$ представляет собой неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, при условии, что предел отношения производных существует (конечный или бесконечный).

Правило Лопиталя справедливо и для случая, когда $a \to \pm\infty$.

Пример 8. Применив правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{1^2-1}{1^2-3\cdot 1+2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-3x+2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x}{2x-3} = \frac{2\cdot 1}{2\cdot 1-3} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Пример 9. Применив правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5-\sqrt{x+25}}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{5-\sqrt{x+25}} = \frac{0}{5-\sqrt{0+25}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x'}{(5-\sqrt{x+25})'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\dfrac{1}{2\sqrt{x+25}}} = \frac{1}{-\dfrac{1}{2\sqrt{0+25}}} = \frac{1}{-\dfrac{1}{10}} = -10.$$

Пример 10. Применив правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-4}{1-2x+7x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-4}{1-2x+7x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+5x-4)'}{(1-2x+7x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+5}{-2+14x}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+5)'}{(-2+14x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{14}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}.$$

Пример 11. Применив правило Лопиталя, найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{2\cos 2x}=\frac{5\cos 0}{2\cos 0}=\frac{5\cdot 1}{2\cdot 1}=\frac{5}{2}.$$

Тест 9. Если $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ – дифференцируемые бесконечно малые или бесконечно большие функции при $x \to a$, то имеет место равенство (правило Лопиталя):

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi^2(x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi^3(x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^2(x)}{\varphi'(x)}$.

Тест 10. Для раскрытия неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ при вычислении предела $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ применили правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-3x+2)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{2x-3}=\dfrac{2\cdot 1}{2\cdot 1-3}=\dfrac{2}{-1}=-2;$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)}{(x^2-3x+2)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x-3}=\dfrac{1^2-1}{2\cdot 1-3}=\dfrac{0}{-1}=0;$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-3x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x^2-3x+2}=\dfrac{2\cdot 1}{1^2-3\cdot 1+2}=\infty.$

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	5	4	2	5	1	5	3	4	3	1

2.6. Приложения дифференциального исчисления

Четность, нечетность и периодичность функции

Функция $f(x)$ называется *четной,* если:

1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля;

2) для любого $x\in D(f)$ справедливо равенство $f(-x)=f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $f(x)$ называется *нечетной,* если:

1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля;

2) для любого $x\in D(f)$ справедливо равенство $f(-x)=-f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется *функцией общего вида*.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T\neq 0$, что для любого $x\in D(f)$ справедливы условия:

1) $x-T\in D(f),\ \ x+T\in D(f)$;

2) $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

Число T называется *периодом* функции $f(x)$. Если T – период функции $f(x)$, то числа $\pm T,\ \pm 2T,\ \pm 3T,\ \ldots$ также являются периодами этой функции. Как правило, под периодом функции понимают наименьший из ее положительных периодов, если таковой существует.

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T, то ее график переходит сам в себя при сдвиге вдоль оси Ox на T единиц влево или вправо.

Пример 1. Указать, какие из следующих функций – четные, какие – нечетные, а какие – общего вида:

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$;

2) $f(x)=x^4-5\cdot|x|$;

3) $f(x)=e^x-2\cdot e^{-x}$.

Решение

1) $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$, и область определения функции симметрична относительно начала координат; кроме того, $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1}=$

$=-\dfrac{x^3}{x^2+1}=-f(x)$, т. е. данная функция нечетная;

2) $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$ и $f(-x)=(-x)^4-5\cdot|-x|=x^4-5\cdot|x|=\ f(x)$, следовательно, функция четная;

3) $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$ и $f(-x)=e^{-x}-2\cdot e^x\neq\pm\ f(x)$, т. е. данная функция общего вида.

Пример 2. Определить, является ли данная функция $f(x)=\sin 4x$ периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует.

Решение

Наименьшим положительным периодом функции $\sin x$ является число 2π. Покажем, что наименьший положительный период $\sin 4x$ – число $\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

Действительно, $\sin 4(x+\frac{\pi}{2})=\sin(4x+2\pi)=\sin 4x$, т. е. $T=\frac{\pi}{2}$ – период данной функции. С другой стороны, если $T_1 > 0$ – какой-либо другой период этой функции, то $\sin 4(x+T_1)=\sin 4x$ для всех x, т. е. $\sin(4x+4T_1)=\sin 4x$, $x \in R$. Отсюда следует, что $4T_1$ – период функции $\sin t$, где $t = 4x$, и, значит, $4T_1 \geq 2\pi$, т. е. $T_1 \geq \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, $T = \frac{\pi}{2}$ – наименьший положительный период функции $\sin 4x$.

Аналогично можно показать, что наименьший положительный период функции $\sin(kx+b)$ и $\cos(kx+b)$ $(k \neq 0)$ – это число $\frac{2\pi}{k}$.

Тест 1. Указать, какая из следующих функций является четной:

1) $f(x)=\frac{3}{x^2-1}$;

2) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

3) $f(x)=x^5+3x^3-x$;

4) $f(x)=\sin 5x$;

5) $f(x)=\sqrt{x}$.

Тест 2. Определить, какая из следующих функций является периодической:

1) $f(x)=|x|$;

2) $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$;

3) $f(x)=x^2$;

4) $f(x)=\cos\frac{x}{4}$;

5) $f(x)=x\cdot e^x$.

Условия монотонности функции. Экстремумы функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на отрезке $[a; b]$, если для любых x_1 и x_2 на этом отрезке верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), когда $x_1 < x_2$.

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех точках интервала $(a; b)$. Если при этом $f'(x) > 0$, то функция возрастает на отрезке $[a; b]$; если $f'(x) < 0$, то функция убывает на отрезке $[a; b]$.*

Функция возрастающая или убывающая называется *монотонной.*

Точка $x = x_0$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует двусторонняя окрестность этой точки, в которой функция определена и при этом для всех x из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), $x \neq x_0$.

***Теорема 2* (*необходимые условия экстремума*).** *Если x_0 – точка экстремума функции, то либо производная в этой точке не существует, либо $f'(x_0) = 0$.*

Обратное утверждение неверно.

Точки, в которых производная равна 0, называются *стационарными.* Точки, в которых производная равна 0 или не существует, называются *критическими.*

***Теорема 3* (*достаточные условия экстремума*).** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (кроме, быть может, самой точки x_0). Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума. Если же производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.*

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – критические точки непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, то наибольшее и наименьшее значения этой функции есть соответственно наибольшее и наименьшее из чисел $f(a)$, $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.

Пример 3. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$.

Решение

Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3 \cdot (x-1) \cdot (x-5)$.

Находим критические точки:

1) $f'(x) = 0$; $x_1 = 1, x_2 = 5$;

2) $f'(x)$ – не существует; таких точек нет.

Следовательно, получаем картину знаков производной, представленную на рисунке 32.

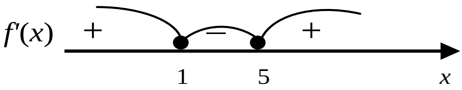


Рисунок 32

Итак, функция $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ убывает на промежутке [1; 5] и возрастает на промежутках (–∞; 1) и (5; +∞).

Точка $x = 1$ является точкой максимума, $x = 5$ – точкой минимума.

$f_{\max} = f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 = 7$, $f_{\min} = f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 = -25$.

Тест 3. Функция $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ убывает на интервале:

1) (–∞; –2) ∪ (2; +∞);
2) (3; 6);
3) (0; 2);
4) (–∞; 2);
5) (–2; +∞).

Тест 4. Если в некотором промежутке производная данной функции $y = f(x)$ положительна, т. е. $f'(x) > 0$, то функция в этом промежутке:

1) постоянна;
2) имеет минимум;
3) возрастает;
4) убывает;
5) имеет максимум.

Тест 5. Точкой экстремума функции $y = 4x^2 + 5$ является точка:

1) 5;

2) 0;
3) –4;
4) 10;
5) 8.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* (*выпуклым вверх*) на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рисунок 33).

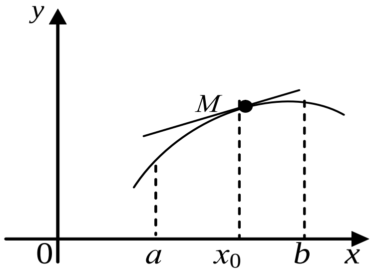


Рисунок 33

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* (*выпуклым вниз*) на интервале $(a; b)$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рисунок 34).

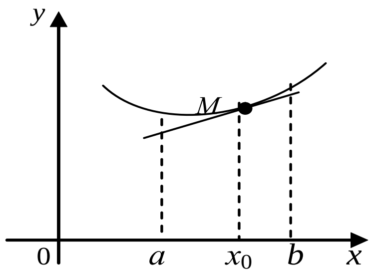


Рисунок 34

Теорема 4* (*достаточное условие выпуклости* (*вогнутости*) *графика функции*).** *Если* $f''(x) < 0$ *в интервале* $(a; b)$, *то график функции* *является* ***выпуклым *в этом интервале. Если* $f''(x) > 0$ *в интервале* $(a; b)$, *то график функции является* ***вогнутым*** *в этом промежутке.*

Точки, в которых вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю или бесконечности либо вовсе не существует, называются *критическими точками второго рода.* Эти точки лежат внутри области определения данной функции.

Точка $M(x_0; f(x_0))$, отделяющая выпуклую часть непрерывной функции от вогнутой или наоборот, называется *точкой перегиба* (рисунок 35).

Точки перегиба функции находятся среди критических точек второго рода.

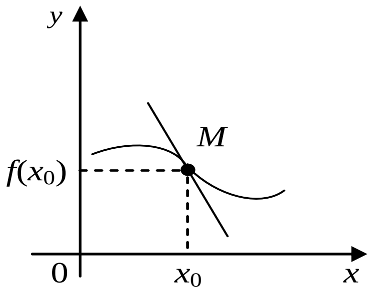


Рисунок 35

Заметим, что график функции пересекает касательную в точке перегиба и переходит с одной ее стороны на другую.

Теорема 5 (***необходимое условие точки перегиба***)***.*** *Если* x_0 *– точка перегиба графика функции* $y = f(x)$, *то либо вторая производная в этой точке не существует, либо* $f''(x_0) = 0$.

Теорема 6 (***достаточное условие точки перегиба***)***.*** *Если при переходе через критическую точку* x_0 *вторая производная* $f''(x)$ *меняет знак, то точка* $M(x_0; f(x_0))$ *есть точка перегиба функции* $y = f(x)$. *Если же* $f''(x)$ *знака не меняет, то точка* $M(x_0; f(x_0))$ *точкой перегиба не является.*

Пример 4. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.

Решение

Функция $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ определена и дважды дифференцируема при $x \in R$

$$y' = 3x^2 - 10x + 3, \; y'' = 6x - 10.$$

Находим точки, в которых вторая производная обращается в ноль или не существует:

1) $y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$;

2) y''– не существует; таких точек нет.

Функция выпукла на промежутке $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$, вогнута на промежутке $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Точка $x = \frac{5}{3}$ – точка перегиба; $y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{27}$ (рисунок 36).

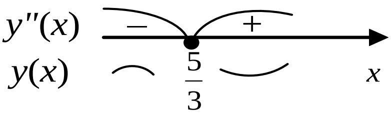


Рисунок 36

Тест 6. Кривая $y = f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a; b)$, если во всех точках этого интервала выполняется соотношение:

1) $f''(x) < 0$;

2) $f''(x) = 0$;

3) $f'(x) < 0$;

4) $f''(x) > 0$;

5) $f'(x) > 0$.

Тест 7. Точка перегиба функции $y = x^5 - x + 5$ равна:

1) 0;

2) 5;

3) 1;

4) –1;
5) 5.

Асимптоты графика функции

Существуют различные точки зрения на понятие асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика функции при неограниченном удалении от начала координат.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая ℓ, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $M(x;\, f(x))$ графика до этой прямой ℓ при удалении точки $M(x;\, f(x))$ в бесконечность стремится к нулю (рисунок 37).

Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у графиков функций, имеющих сколь угодно далекие точки («неограниченные» кривые).

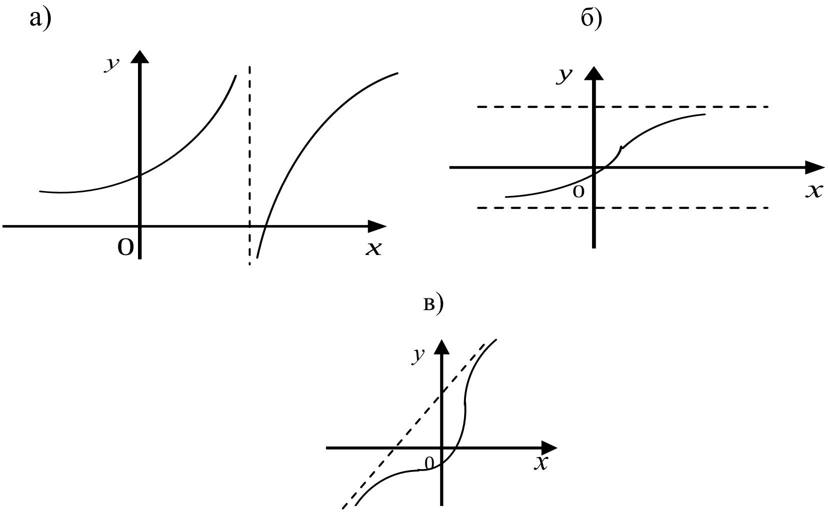


Рисунок 37

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

На рисунке 37а изображена вертикальная асимптота, на рисунке 37б – горизонтальная асимптота, а на рисунке 37в – наклонная.

Этими тремя случаями исчерпываются все возможные расположения асимптот.

Нахождение асимптот графика функции $y = f(x)$ основано на утверждениях, представленных ниже.

Теорема 7. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0 (*исключая, возможно, саму эту точку*) *и хотя бы один из пределов функции при* $x \to x_0 - 0$ (*слева*) *или при* $x \to x_0 + 0$ (*справа*) *равен бесконечности, т. е.* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ *или* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. *Тогда прямая* $x = x_0$ *является* ***вертикальной асимптотой*** *графика функции* $y = f(x)$.

Вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения $(a; b)$, если a и b – конечные числа.

Теорема 8. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена при достаточно больших* x *и существует конечный предел функции* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. *Тогда прямая* $y = b$ *есть* ***горизонтальная асимптота*** *графика функции* $y = f(x)$.

Замечание. Если пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b_1$ *– конечные и различные, то прямые* $y = b$ *и* $y = b_1$ *будут* ***горизонтальными асимптотами*** (*правосторонней и левосторонней*).

Может оказаться, что только один из этих двух пределов конечен, тогда будет одна горизонтальная асимптота.

В том случае, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, функция может иметь наклонную асимптоту.

Теорема 9. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена при достаточно больших* x *и существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ *и* $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$. *Тогда прямая* $y = kx + b$ *является* ***наклонной асимптотой*** *графика функции* $y = f(x)$.

Наклонная асимптота так же, как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

Пример 5. Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

Решение

Функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$, в которой она терпит разрыв второго рода, причем $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$. Отсюда следует, что прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота и других вертикальных асимптот нет.

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты. Находим $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1,$ откуда

$$b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ – наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$. Аналогично получим, что эта прямая является наклонной асимптотой и при $x \to -\infty$.

Поскольку угловой коэффициент k наклонной асимптоты не равен нулю, то график функции не имеет горизонтальных асимптот.

Тест 8. Горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$ является прямая:

1) $x = 3$;
2) $y = -3$;
3) $x = 5$;
4) $y = 9$;
5) $y = 1$.

Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат.

4. Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
6. Найти асимптоты.
7. Построить график функции.

Пример 6. Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение

Выполним все семь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$. Область определения $D(y)$ функции – вся числовая ось, за исключением точек $x = 1$ и $x = -1$, т. е. $D(y)=(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

2. Функция $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ является нечетной, так как

$$y(-x)=\frac{-x}{1-(-x)^2}=-\frac{x}{1-x^2}=-y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x\ge 0$.

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат: с осью Oy график пересекается при $x = 0$, откуда $y = 0$, т. е. $O(0;\ 0)$ – точка пересечения с осью Oy; с осью Ox график пересекается, если $y = 0$, т. е. $y=\dfrac{x}{1-x^2}=0,$ откуда $x = 0$.

Таким образом, $O(0;\ 0)$ – единственная точка пересечения графика с осями координат.

4. Находим интервалы возрастания и убывания функции.

Находим первую производную

$$y'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1\cdot(1-x^2)-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Можно увидеть, что $y'>0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

Исследуем функцию на экстремум. Так как $y'=\dfrac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

5. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y''

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x\cdot(1-x^2)^2 - (x^2+1)\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. На рисунке 38 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции.

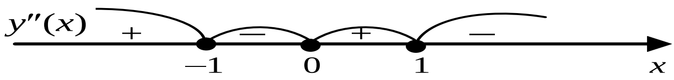


Рисунок 38

Точка $O(0;0)$ – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах (–1; 0) и (1; ∞); выпуклый вниз на интервалах (–∞; –1) и (0; 1).

6. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2} = 0 \text{ } (k = 0 \text{ при } x \to +\infty \text{ и при } x \to -\infty),$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение $y = 0$. Прямая $y = 0$ является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

7. График функции изображен на рисунке 39.

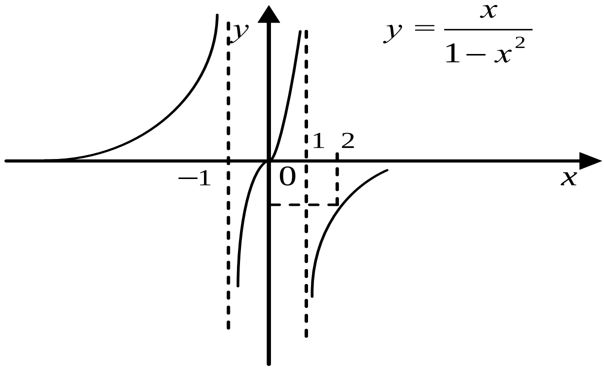


Рисунок 39

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8
Правильный ответ	1	4	3	3	2	4	1	5

2.7. Функции нескольких переменных

Понятие функции нескольких переменных

Область определения

Переменная z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой паре $(x; y)$ значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области D соответствует определенное значение z: $z = f(x; y)$.

Значение функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ обозначается $z_0 = f(x_0; y_0)$ и называется *частным значением функции*.

Переменная величина u называется *функцией трех переменных* x, y, z, если каждому набору этих переменных соответствует единственное значение переменной u: $u = f(x; y; z)$.

Будем пользоваться заданием функции, как правило, аналитическим способом: когда функция задается с помощью формулы.

Множество всех точек, в которых определена функция n переменных, называется *областью определения функции*.

Область определения находится из формулы функциональной зависимости путем соблюдения корректности выполнения соответствующих математических операций.

В случае двух переменных область определения функции $z = f(x; y)$ представляет собой некоторое множество точек на координатной плоскости Oxy, и тогда сама функция изображается в виде некоторой поверхности.

Пример 1. Найти $f(1; 2)$ для функции $f(x; y) = \dfrac{(x+y)^2}{2xy}$.

Решение

Чтобы найти $f(1; 2)$, надо в выражении для $f(x; y)$ подставить $x = 1$, $y = 2$ и выполнить указанные в f действия.

Имеем: $f(1;\ 2) = \dfrac{(1+2)^2}{2\cdot 1\cdot 2} = \dfrac{9}{4} = 2\dfrac{1}{4}$.

Пример 2. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ и изобразить графически.

Решение

Эта функция двух переменных определена, когда выражение под знаком квадратного корня неотрицательно, т. е. $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$. Последнему соотношению удовлетворяют координаты всех точек, находящихся внутри круга радиусом $R = 2$ с центром в начале координат и на его границе. Область определения данной функции – указанный круг (рисунок 40).

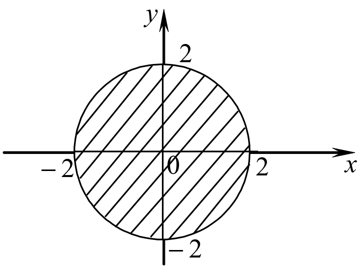


Рисунок 40

Пример 3. Найти область определения функции $z = \arcsin\left(\frac{x}{y^2}\right)$ и изобразить графически.

Решение

Данная функция определена на интервале [–1; 1], т. е.

$$-1 \le \frac{x}{y^2} \le 1 \text{ или } \begin{cases} -y^2 \le x \le y^2, \\ y \ne 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \ge x, \\ y^2 \ge -x, \\ y \ne 0. \end{cases}$$

Неравенства $y^2 \ge x$ и $y^2 \ge -x$ задают часть плоскости, расположенную вне обеих парабол одновременно. Отметим, что точка (0; 0) не входит в искомую область определения.

Найденное множество точек, являющееся областью определения заданной функции, штриховкой показано на рисунке 41.

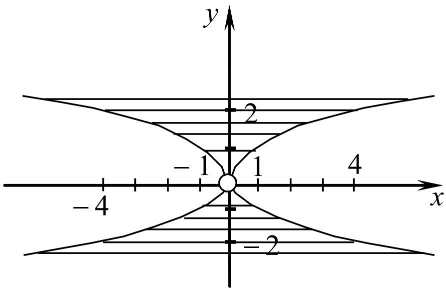


Рисунок 41

Пример 4. Найти область определения функции $z = \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$ и изобразить графически.

Решение

Область определения функции находится как решение неравенства

$$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} > 0 \text{ или } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1.$$

Это неравенство описывает внутреннюю часть эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (рисунок 42).

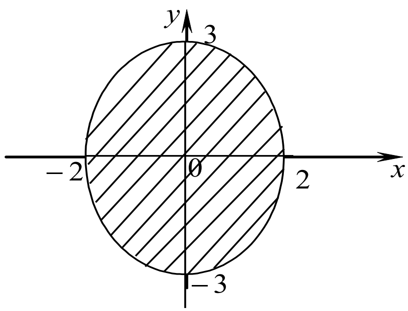
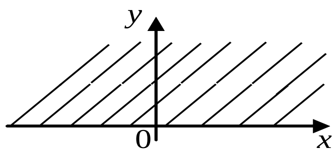


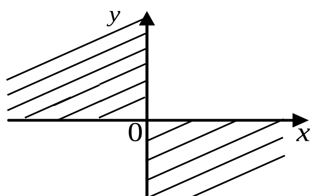
Рисунок 42

Тест 1. Значение функции $f(x) = 2x - 3xy^2$ в точке (2; 1) равно:
1) 7;
2) –5;
3) –1;
4) 1;
5) –2.

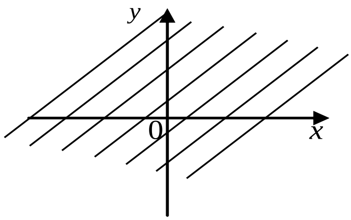
Тест 2. Область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ является:
1)



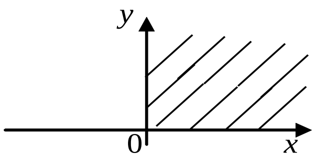
2)



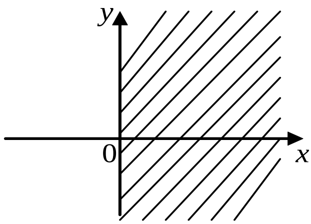
3)



4)



5)



Тест 3. Указать функцию двух переменных:

1) $y = \dfrac{\sqrt{x_1 - x_2 + x_4}}{x_3}$;

2) $y = \ln x$;

3) $t = xy - 3z$;

4) $z = \sqrt{x} + y^2$;

5) $y = \cos x - 5$.

Предел функции

Число A называется *пределом функции* $z = f(x;\, y)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех точек $M(x;\ y)$, отстоящих от M_0 не более чем на δ, выполняется неравенство $|f(x;\ y)-A|<\varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A.$

На функции нескольких переменных легко переносятся все положения теории пределов функции одной переменной, в частности, справедлива теорема, представленная ниже.

Теорема

1) $\lim\limits_{M\to M_0}\left(f(M)\pm g(M)\right)=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\pm\lim\limits_{M\to M_0} g(M);$

2) $\lim\limits_{M\to M_0}\left(f(M)\cdot g(M)\right)=\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\cdot\lim\limits_{M\to M_0} g(M);$

3) $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}$, *если* $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)\neq 0.$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\dfrac{x+3y^2-4}{\sqrt{x^2+16}-7}$.

Решение

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\frac{x+3y^2-4}{\sqrt{x^2+16}-7}=\frac{3+3\cdot 2^2-4}{\sqrt{3^2+16}-7}=\frac{3+12-4}{5-7}=\frac{11}{-2}=-5{,}5.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-8+\sqrt{64+x^2y}}{y}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Раскроем эту неопределенность. Избавимся от иррациональности в числителе

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-8+\sqrt{64+x^2y}}{y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(-8+\sqrt{64+x^2y})\cdot(-8-\sqrt{64+x^2y})}{y\cdot(-8-\sqrt{64+x^2y})}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{64-64-x^2y}{y\cdot(-8-\sqrt{64+x^2y})}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-x^2y}{y\cdot(-8-\sqrt{64+x^2y})}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-x^2}{-8-\sqrt{64+x^2y}}=\frac{-16}{-8-8}=\frac{-16}{-16}=1.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{\sin 3xy^2}{x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Находим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin 3xy^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin 3xy^2\cdot 3y^2}{x\cdot 3y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin 3xy^2}{3xy^2}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}3y^2=$$

$$=1\cdot 3\cdot 3^2=27,\ \text{так как}\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(1+xy^3\right)^{\frac{3y}{x-2x^2y}}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$. Выражение, стоящее под знаком предела, преобразуем к такому виду, чтобы можно было воспользоваться вторым замечательным пределом

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(1+xy^3\right)^{\frac{3y}{x-2x^2y}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(\left(1+xy^3\right)^{\frac{1}{xy^3}}\right)^{\frac{3y}{x-2x^2y}\cdot xy^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}e^{\frac{3xy^4}{x-2x^2y}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}e^{\frac{3xy^4}{x\cdot(1-2xy)}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}e^{\frac{3y^4}{1-2xy}}=e^{\frac{3}{1}}=e^3.$$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Решение

Данная функция $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ определена всюду на координатной плоскости Oxy, кроме точки $O(0;\ 0)$. Рассмотрим предел этой функции при стремлении точки $M(x;\ y)$ к началу координат по любой прямой, проходящей через точку O, т. е. вдоль линии $y = kx$ $(k \neq 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot k\cdot x}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k\cdot x^2}{x^2\cdot(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Получили, что значение предела зависит от углового коэффициента прямой. Итак, соответствующим разным значениям k получаем разные предельные значения. Отсюда следует, что предел данной функции в точке $O(0;\ 0)$ не существует.

Тест 4. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}} (4xy-1)$:

1) –3;
2) 0;
3) –8;
4) –9;
5) –10.

Тест 5. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{2\cdot\sin xy}{5y}$:

1) $\dfrac{2}{5}$;
2) 0;
3) 2;
4) 5;
5) $\dfrac{4}{5}$.

Непрерывность функции двух переменных

Функция $z = f(x;\ y)$ называется *непрерывной в точке* $(x_0;\ y_0)$, если она:

1) определена в точке $(x_0; y_0)$;

2) имеет конечный предел при $x \to x_0$ и $y \to y_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке $(x_0; y_0)$, т. е.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Геометрический смысл непрерывности заключается в том, что график в точке $(x_0; y_0)$ представляет собой сплошную нерасслаивающуюся поверхность.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в данной области*.

Если в некоторой точке $N(x; y)$ не выполняется условие непрерывности, то эта точка называется *точкой разрыва функции* $z = f(x; y)$.

Нарушение условий непрерывности функции $z = f(x; y)$ может происходить как в отдельных точках, так и в точках, образующих некоторую линию (линия разрыва).

Пример 10. Найти точки разрыва функций:

1) $z = \dfrac{1}{x - y}$;

2) $z = \dfrac{1}{(x-5)^2 + y^2}$;

3) $u = \dfrac{3}{x^2 + y^2 + z^2 - 16}$.

Решение

1. Данная функция определена для любых x, y, таких, что $x - y \neq 0$, т. е. $x \neq y$. Следовательно, прямая $x = y$ является линией разрыва функции.

2. Данная функция определена на R^2 всюду, кроме точки (5; 0), которая и является точкой разрыва функции.

3. Функция $u = \dfrac{3}{x^2 + y^2 + z^2 - 16}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 16$. Сфера с центром в начале координат и радиусом 4 является поверхностью разрыва функции.

Тест 6. Функция $z = \dfrac{y}{4x-8}$ не является непрерывной в точке:

1) (0; 0);
2) (2; 1);
3) (0; 1);
4) (8; 0);
5) (1; 2).

Частные производные и дифференциал функции

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю (если этот предел существует).

Для функции $z = f(x;y)$ имеем:

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x;y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x}$ (частная производная по переменной x);
- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x;y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}$ (частная производная по переменной y).

Из определения частных производных следует, что для нахождения производной z'_x надо считать постоянной переменную y, а для нахождения z'_y – переменную x.

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Полным дифференциалом функции называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т. е. $dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y$.

Для независимых переменных x и y любые приращения Δx и Δy будем считать их дифференциалами, т. е. $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$.

Тогда *полный дифференциал функции* $z = f(x;\ y)$ вычисляется по следующей формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy,$$

а для функции трех переменных $u = f(x; y; x)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz.$$

Полный дифференциал часто используется для *приближенных вычислений* значений функции, т. е.

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y.$$

Существование частных производных является лишь *необходимым*, но недостаточным условием дифференцируемости функции.

Следующая теорема выражает *достаточное условие дифференцируемости* функции двух переменных.

Теорема. Для того чтобы функция $z = f(x; y)$ была дифференцируемой в данной точке, достаточно, чтобы она обладала частными производными, непрерывными в этой точке.

Пример 11. Вычислить частные производные и полный дифференциал функции $z = \dfrac{y}{x+y}$.

Решение

Считая y постоянным, найдем производную по x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(\frac{y}{x+y}\right)'_x = y \cdot \left(\frac{1}{x+y}\right)'_x = y \cdot \left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right) \cdot (x+y)'_x =$$

$$= -\frac{y}{(x+y)^2} \cdot (1+0) = -\frac{y}{(x+y)^2}.$$

Считая x постоянным и дифференцируя по y, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(\frac{y}{x+y}\right)'_y = \frac{(y)'_y \cdot (x+y) - y \cdot (x+y)'_y}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (x+y) - y \cdot (0+1)}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2}.$$

Полный дифференциал: $dz = -\dfrac{y}{(x+y)^2} \cdot dx + \dfrac{x}{(x+y)^2} \cdot dy.$

Пример 12. Вычислить $1{,}07^{3{,}97}$.

Решение

Число $1{,}07^{3{,}97}$ есть частное значение функции $f(x;\, y) = x^y$ при $x = 1{,}07$, $y = 3{,}97$. Известно, что $f(1;\, 4) = 1$. Поэтому принимаем $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Тогда $\Delta x = x - x_0 = 1{,}07 - 1 = 0{,}07$, $\Delta y = y - y0 = 3{,}97 - 4 = -0{,}03$.

Так как $f'_x(x;y) = y \cdot x^{y-1}$, $f'_x(1;\,4) = 4 \cdot 1^{4-1} = 4$, $f'_y(x;y) = x^y \cdot \ln x$, $f'_y(1;\,4) = 1^4 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$, то $1{,}07^{3{,}97} \approx 1 + 4 \cdot 0{,}07 + 0 \cdot (-0{,}03) = 1{,}28$.

Тест 7. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = 2^x + 3y$ равна:

1) $2^x \cdot \ln 2$;

2) $2^x + 3$;

3) $2^x \cdot \ln 2 + 3y$;

4) $x \cdot 2^{x-1} + 3$;

5) $2^x + 3y$.

Тест 8. Полный дифференциал $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ функции $z = x^2 - 4y$ равен:

1) $x \cdot dx + y \cdot dy$;

2) $2 \cdot dx + 4 \cdot dy$;

3) $2x \cdot dx - 4 \cdot dy$;

4) $2 \cdot x \cdot dy$;

5) $-4 \cdot dy$.

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x;y);$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x;y);$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x;y);$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Запись $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ означает, что функция z k раз продифференцирована по переменной x и $n-k$ раз по переменной y.

Частные производные $f''_{xy}(x;y)$ и $f''_{yx}(x;y)$ называются *смешанными.* Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

Полный дифференциал второго порядка $d^2 z$ функции $z = f(x;\ y)$ выражается формулой

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2.$$

Дифференциалы высших порядков определяются по аналогии

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^n (z).$$

Пример 13. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x^2 y^2}$.

Решение

Вначале найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y^2} \cdot 2xy^2;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 y^2} \cdot 2x^2 y.$$

Продифференцировав их еще раз, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^2y^4 + e^{x^2y^2} \cdot 2y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^4y^2 + e^{x^2y^2} \cdot 2x^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x^2y^2} \cdot 4x^3y^3 + e^{x^2y^2} \cdot 4xy.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример 14. Найти полный дифференциал второго порядка функции $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$.

Решение

Находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y + 2x^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Следовательно,

$$d^2z = (6x + 2y^2) \cdot dx^2 + 8xy \cdot dx \cdot dy + (6y + 2x^2) \cdot dy^2.$$

Тест 9. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = x^3 - x^2y - y^3$ равна:

1) $-x^2 - 3y^2$;

2) $6x - 2y$;

3) $-6y$;

4) $-2x$;

5) $3y^2$.

Тест 10. Частная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = 7x^2y - 4y^2$ равна:

1) 0;

2) $14xy$;

3) $14x$;

4) $7x^2y$;

5) $-8y$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – фиксированная точка на поверхности, заданной функцией $z = f(x;\ y)$ или уравнением $F(x;\ y;\ z) = 0$.

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, в которой расположены касательные к всевозможным кривым, проведенным на поверхности через точку M_0.

Нормалью называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости.

Из определений следует, что нормальный вектор касательной плоскости и направляющий вектор нормали совпадают.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x;\ y)$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ к данной поверхности имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)\cdot(y - y_0), \qquad (1)$$

а *канонические уравнения нормали*, проведенной через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ поверхности, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (2)$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде: $F(x;\ y;\ z) = 0$ и $F(x_0;\ y_0;\ z_0) = 0$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)\cdot(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0;y_0;z_0)\cdot(z-z_0)=0, \tag{3}$$

а *уравнение нормали*

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}. \tag{4}$$

Пример 15. Найти уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ в точке $M_0(1;\,2;\,-1)$.

Решение

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1;\,2;\,-1)$

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)=(3x^2+yz)\Big|_{M_0}=1;$$
$$F'_y(x_0;y_0;z_0)=(3y^2+xz)\Big|_{M_0}=11;$$
$$F'_z(x_0;y_0;z_0)=(3z^2+yx)\Big|_{M_0}=5.$$

Подставляя их в уравнения (3) и (4), получаем соответственно уравнение касательной плоскости: $(x-1)+11\cdot(y-2)+5\cdot(z+1)=0,$ канонические уравнения нормали: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{5}.$

Тест 11. Уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2+3y^2-4z^2=15$ в точке $P_0(2;\,-3;\,2)$ имеет следующий вид:

1) $2\cdot(x-2)-9\cdot(y+3)-8\cdot(z-2)=0;$
2) $4\cdot(x-2)+9\cdot(y-2)+8\cdot(z+3)=0;$
3) $2\cdot(x-2)-18\cdot(y+3)-16\cdot(z-2)=0;$
4) $-3\cdot(x+2)-9\cdot(y-3)+(z-2)=0;$
5) $2x\cdot(x-1)+15\cdot(y-2)+4\cdot(z+3)=0.$

Производная по направлению. Градиент

Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ представляют собой производные от функции $z = f(x; y)$ по двум частным направлениям осей Ox и Oy (рисунок 43).

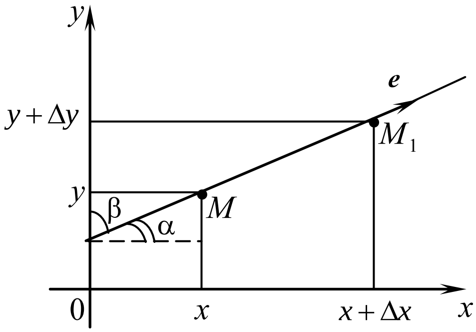


Рисунок 43

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$, ℓ – некоторое направление, задаваемое единичным вектором $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha; \cos\beta)$, где $|\boldsymbol{e}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, ибо $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3\pi}{2}$); $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – косинусы углов, образуемых вектором $\boldsymbol{e}$ с осями координат и называемые *направляющими косинусами.*

При перемещении в данном направлении ℓ точки $M(x; y)$ в точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ функция z получит приращение $\Delta_\ell z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$, называемое *приращением функции* z *в данном направлении* ℓ.

Если $MM_1 = \Delta\ell$, то, очевидно, что $\Delta x = \Delta\ell \cdot \cos\alpha$; $\Delta y = \Delta\ell \cdot \cos\beta$, следовательно, $\Delta_\ell z = f(x + \Delta\ell \cdot \cos\alpha; y + \Delta\ell \cdot \cos\beta) - f(x; y)$.

Производной z'_ℓ *по направлению* ℓ функции двух переменных $z = f(x; y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения $\Delta\ell$ при стремлении последней к нулю, т. е.

$$z'_\ell = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta_\ell z}{\Delta\ell}.$$

Производная z'_ℓ характеризует *скорость изменения функции в направлении* ℓ.

Формула для производной функции $z = f(x; y)$ *по направлению* имеет вид

$$z'_\ell = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta.$$

Пример 16. Дана функция $z = x^2 + y^2$, в точке $M(1;\ 1)$ направление составляет с осью Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Найти производную функции по указанному направлению в этой точке.

Решение

Так как $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то угол $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{6}$. По формуле производной функции по направлению получим

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 2x \cdot \frac{1}{2} + 2y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x + \sqrt{3}y.$$

В точке $M(1;\ 1)$ получаем: $\left.\frac{\partial z}{\partial \ell}\right|_{(1;1)} = 1 + \sqrt{3}$.

Градиентом ***grad z*** *функции* $z = f(x; y)$ называется вектор с координатами $(z'_x;\ z'_y)$.

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{grad\ z} = (z'_x;\ z'_y)$ и единичного вектора $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$.

Получим

$$(\boldsymbol{grad\ z};\ \boldsymbol{e}) = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta.$$

Итак, *производная по направлению* есть скалярное произведение градиента ***grad z*** и единичного вектора, задающего направление ℓ.

Градиент функции ***grad z*** в данной точке характеризует *направление максимальной скорости изменения функции в этой точке*.

Пример 17. Найти градиент функции $z = \frac{xy}{x + y + 1}$ в точке $M(0;\ 1)$.

Решение

По формуле градиента

$$\textbf{\textit{grad z}} = \left(z'_x; z'_y\right) = \left(\frac{y \cdot (y+1)}{(x+y+1)^2}; \frac{x \cdot (x+1)}{(x+y+1)^2} \right).$$

При $x = 0$ и $y = 1$ получаем

$$\textbf{\textit{grad z}}\Big|_{(0;\,1)} = (1;\,0).$$

Тест 12. Градиент функции $z = x^2 + 3y^3 - xy$ в точке $A(1;\,1)$ равен:

1) $(1;\,1)$;
2) $(4;\,8)$;
3) $(1;\,9)$;
4) $(2;\,4)$;
5) $(1;\,8)$.

Дифференцирование сложных и неявных функций

Случай одной независимой переменной

Предположим, что $z = f(x;\,y)$ – дифференцируемая функция двух переменных x и y в некоторой области D, а аргументы x и y являются дифференцируемыми функциями некоторой переменной t, т. е. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда $z = f\big(x(t);\, y(t)\big) = \varphi(t)$ – функция одной переменной t.

Теорема. Имеет место равенство

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если t совпадает с одним из аргументов, скажем, $t = x$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

и $\dfrac{dz}{dx}$ называется *полной производной функции z по x*.

Случай нескольких независимых переменных

Если аргументы x и y функции $z = f(x; y)$ являются функциями двух переменных, скажем, $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, то $z = f\big(x(u; v); y(u; v)\big)$ также является функцией двух переменных u и v.

Теорема. Имеют место формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Дифференциал сложной функции

Дифференциал сложной функции $z = z(x; y)$, где $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$, можно получить, если в формуле дифференциала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

заменить $dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv$ и $dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv.$

В результате подстановки и перегруппировки членов при du и dv приходим к формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv,$$

показывающей, что форма (вид) дифференциала не зависит от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других независимых переменных. Это свойство называется *инвариантностью* формы первого дифференциала.

Неявная функция одной переменной

Функция $y = y(x)$ называется *неявной функцией*, если она определяется уравнением $F(x; y) = 0,$ неразрешенным относительно y.

Это значит, что при каждом значении x_0, при котором неявная функция определена, она принимает единственное значение y_0 так, что $F(x_0; y_0) = 0.$

Теорема. Если $F(x; y)$ – дифференцируемая функция переменных x и y в некоторой области D и $F'_y(x; y) \neq 0,$ то уравнение $F(x; y) = 0$ определяет однозначно неявную функцию $y(x)$, также дифференцируемую, и ее производная находится по формуле

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)}.$$

В частности,

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0; y_0)}{F'_y(x_0; y_0)}.$$

Неявная функция двух переменных

Функция $z = z(x; y)$ называется *неявной функцией переменных* x и y, если она определяется уравнением $F(x; y; z) = 0$, неразрешенным относительно z.

Теорема. Если функция $F(x; y; z)$ дифференцируема по переменным x, y, z в некоторой пространственной области D и $F'_z(x; y; z) \neq 0,$ то уравнение $F(x; y; z) = 0$ определяет однозначную неявную функцию $z(x; y)$, также дифференцируемую, и имеет место

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)}.$$

Пример 18. Найти частные производные функции $z = \sin(uv),$ где $u = 2x + 3y$; $v = xy$.

Решение

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v \cdot \cos(uv) \cdot 2 + u \cdot \cos(uv) \cdot y = \cos(2x^2 y + 3xy^2) \cdot (4xy + 3y^2);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v \cdot \cos(uv) \cdot 3 + u \cdot \cos(uv) \cdot x = \cos(2x^2 y + 3xy^2) \cdot (6xy + 2x^2).$$

Пример 19. Найти полную производную функции $u = x + y^2 + z^3$, где $y = \sin x$; $z = \cos x$.

Решение

Имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 1 + 2y \cdot \cos x + 3z^2 \cdot (-\sin x) =$$

$$= 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - 3 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x = 1 + \sin 2x - 3 \cdot \cos^2 x \cdot \sin x.$$

Пример 20. Найти производную функции y, заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 - e^{xy} - 5 = 0$.

Решение

Согласно формуле имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)} = -\frac{3x^2 - e^{xy} y}{3y^2 - e^{xy} x}.$$

Пример 21. Найти частные производные функции z, заданной неявно уравнением $xyz + x^3 - y^3 - z^3 + 5 = 0$.

Решение

Воспользуемся формулами. Получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = -\frac{yz + 3x^2}{xy - 3z^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x; y; z)}{F'_z(x; y; z)} = -\frac{xz - 3y^2}{xy - 3z^2}.$$

Тест 13. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции z, заданной неявно уравнением $x^2 y - xy^2 - xyz = 0$, равна:

1) $\frac{y - y^2 - zx}{2x - yz}$;

2) $\frac{2xy - y^2 - yz}{xy}$;

3) $-\frac{2xy - y^2}{xy}$;

4) $-\dfrac{2yx-yz}{yz}$;

5) $\dfrac{y-x+z}{x^2-xz}$.

Экстремум функции двух переменных

Понятия максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D, точка $M_0(x_0; y_0) \in D$.

Функция $z = f(x; y)$ имеет *локальный максимум* (*минимум*) в точке $M_0(x_0; y_0)$, если неравенство

$$f(x_0; y_0) > f(x; y) \quad \left(f(x_0; y_0) < f(x; y)\right)$$

имеет место во всех точках $M(x; y)$, достаточно близких к $M_0(x_0; y_0)$, но отличных от нее.

Максимум или минимум функции называется *экстремумом*, а точки минимума и максимума функции называются *точками локального экстремума*.

В силу определения, точка локального экстремума функции лежит внутри области определения функции.

В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Необходимые условия экстремума

Если точка $M_0(x_0; y_0)$ является точкой локального экстремума функции $f(x; y)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю

$$f'_x(x_0; y_0) = 0, \quad f'_y(x_0; y_0) = 0$$

или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются *стационарными,* или *точками возможного экстремума*.

Пример 22. Найти стационарные точки функции

$$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

Решение

Вычислим частные производные по x и y

$$z'_x = 2x - y + 9;$$
$$z'_y = -x + 2y - 6.$$

Приравняем их к нулю

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0, & \cdot 2 \\ -x + 2y - 6 = 0, & \end{cases} \Big] + \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 9 = 0, \\ 3x + 12 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 9, \\ x = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1, \\ x = -4. \end{cases}$$

Итак, точка $M_0(-4; 1)$ является стационарной для данной функции.

Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться *достаточные условия экстремума*.

Достаточные условия экстремума

Пусть в стационарной точке $(x_0; y_0)$ *и некоторой ее окрестности функция* $z = f(x; y)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке* $(x_0; y_0)$ *значения*

$$A = f''_{xx}(x_0; y_0); \;\; B = f''_{xy}(x_0; y_0); \;\; C = f''_{yy}(x_0; y_0).$$

Обозначим: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2.$

Тогда:

1) *если* $\Delta > 0$, *то функция* $z = f(x; y)$ *в точке* $(x_0; y_0)$ *имеет экстремум*:

• ***локальный максимум***, *если* $A < 0$ (*или* $C < 0$);

• ***локальный минимум***, *если* $A > 0$ (*или* $C > 0$);

2) *если* $\Delta < 0$, *то функция* $z = f(x; y)$ *в точке* $(x_0; y_0)$ ***экстремума не имеет***;

3) *если* $\Delta = 0$, *то экстремум в точке* $(x_0; y_0)$ *может быть, может и не быть. Необходимы дополнительные исследования*.

Исследование функции двух переменных на локальный экстремум рекомендуется проводить по следующей схеме:

1. Найти частные производные функции z'_x и z'_y.

2. Решить систему уравнений $z'_x = 0,\ \ z'_y = 0$ и найти стационарные точки функции.

3. Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой стационарной точке и с помощью достаточного условия сделать вывод о наличии экстремумов.

4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример 23. Исследовать на экстремум функцию

$$z = y^2 + x^2 - 4y + 4.$$

Решение

1. Находим частные производные

$$z'_x = 2x;\ \ z'_y = 2y - 4.$$

2. Находим стационарные точки функции из системы

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y - 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$$

Итак, (0; 2) – единственная стационарная точка.

3. Находим частные производные второго порядка

$$A = z''_{xx} = 2;$$
$$B = z''_{xy} = 0;$$
$$C = z''_{yy} = 2.$$

Имеем $\Delta = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4.$

Так как $\Delta > 0$, функция имеет экстремум, причем $A = 2 > 0$, следовательно, это локальный минимум.

4. Находим минимум функции $z_{\min}(0; 2) = 2^2 + 0^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0.$

Тест 14. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{vmatrix} > 0,$ то функция $f(x;\ y)$ в точке $M(x; y)$ имеет локальный максимум, если:

1) $f''_{xx}(x;y) = 0;$
2) $f''_{xx}(x;y) < 0;$
3) $f''_{xx}(x;y) > 0;$
4) $f''_{yy}(x;y) > 0;$
5) $f''_{xy}(x;y) = 0.$

Условный экстремум

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть рассматривается функция $z = f(x; y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $\varphi(x; y) = 0$.

Экстремум функции $z = f(x; y)$, найденный при условии $\varphi(x; y) = 0$, называется *условным*. Уравнение $\varphi(x;\ y) = 0$ называется *уравнением связи*.

Если из уравнения связи $\varphi(x;\ y) = 0$ найти $y = y(x)$ и подставить в функцию $z = f(x; y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x; y(x))$.

Пример 24. Найти экстремум функции $z = x^2 - y^2$ при условии, что $2x - y - 6 = 0$.

Решение

1. Из уравнения связи $y = 2x - 6.$

2. Подставив $y = 2x - 6$ в данную функцию, получим функцию одной переменной x

$$z = x^2 - (2x-6)^2 = x^2 - (4x^2 - 24x + 36) = x^2 - 4x^2 + 24x - 36 =$$
$$= -3x^2 + 24x - 36.$$

3. Находим $z' = -6x + 24$

$$z' = 0, \text{ т. е. } -6x + 24 = 0,\ x = 4.$$

Тогда $y = 2 \cdot 4 - 6 = 2.$

Итак, $M(4;\ 2)$ – стационарная точка.

4. Так как $z'' = -6 < 0,$ то в точке $M(4;\ 2)$ данная функция достигает *условного максимума*.

5. $z_{\max}(4;\ 2) = 4^2 - 2^2 = 12.$

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области (глобальный экстремум)

Множество называется *замкнутым*, если оно включает все свои граничные точки, т. е. точки, окрестности которых содержат точки как принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.

Пусть функция $z = f(x;\ y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}.$ Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего *наибольшего и наименьшего значений*. Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D},$ или в точках, лежащих на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в $\overline{D}$ необходимо:

1. Найти стационарные точки функции, принадлежащие $\overline{D},$ и вычислить значения функции в них.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x;\ y)$ на границах области.

Добавим, что, как правило, граница $\overline{D}$ состоит из совокупности отдельных участков, на каждом из которых задача сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной $z = \varphi_i(t)$, где i – номер участка, а t – независимая переменная на этом участке, которая может совпасть с x или y либо быть отдельным параметром.

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример 25. Найти глобальный экстремум функции $z = 3x + y - xy$ в замкнутой области $\overline{D}$: $y = x,\ \ y = 4,\ \ x = 0.$

Решение

1. Построим $\overline{D}$ (рисунок 44).

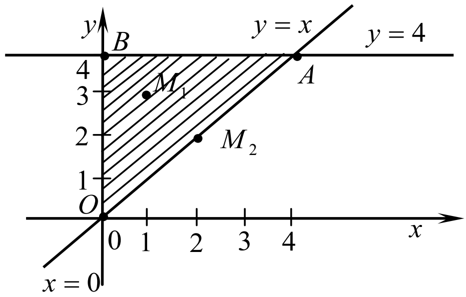


Рисунок 44

2. Находим стационарные точки из следующей системы:

$$\begin{cases} z'_x = 3 - y = 0, \\ z'_y = 1 - x = 0. \end{cases}$$

Откуда $x = 1$, $y = 3$. Получим одну стационарную точку $M_1(1;\ 3)$, которая лежит в области $\overline{D}$.

Итак, $z_1 = z(M_1) = z(1; 3) = 3 \cdot 1 + 3 - 1 \cdot 3 = 3.$

3. Исследуем данную функцию на границе области $\overline{D}$, состоящей из участков OB, BA, AO. Кроме того, необходимо учесть и концы отрезков, т. е. точки O, B, A:

• Составим уравнения для OB: $x = 0$.

Подставим его в z: $z = 3 \cdot 0 + y - 0 \cdot y = y$.

Получили функцию одной переменной, которую исследуем на экстремум.

Находим $z'_y = 1 \neq 0$. Следовательно, на OB нет стационарных точек.

На концах отрезка OB

$$z_2 = z(O) = z(0; 0) = 3 \cdot 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0;$$

$$z_3 = z(B) = z(0; 4) = 3 \cdot 0 + 4 - 0 \cdot 4 = 4.$$

• Аналогично все точки прямой BA удовлетворяют уравнению $y = 4$.

Тогда $z = 3x + 4 - x \cdot 4 = -x + 4$, $z'_x = -1 \neq 0$. На BA нет стационарных точек.

В точке A: $z_4 = z(A) = z(4; 4) = 3 \cdot 4 + 4 - 4 \cdot 4 = 0.$

• Уравнение прямой AO имеет вид $y = x$.

Тогда $z = 3x + x - x \cdot x = 4x - x^2$, $z'_x = 4 - 2x = 0$, $x = 2$. Тогда $y = 2$.

Итак, $M_2(2;\,2)$ – стационарная точка.

$z_5 = z(M_2) = z(2;\,2) = 3\cdot 2 + 2 - 2\cdot 2 = 4.$

На концах отрезка AO значения функции уже найдены.

4. Сравнивая все полученные значения функции z, заключаем, что $z_{наиб} = 4$ достигается в точках $B(0;\,4)$ и $M_2(2;\,2)$, а $z_{наим} = 0$ – в точках $O(0;\,0)$ и $A(4;\,4)$.

$z_{наим} = z(0;\,0) = z(4;\,4) = 0.$

Эмпирические формулы

При анализе экономических процессов часто приходится решать задачу приближенного представления (аппроксимации) заданных функций другими, более простыми.

Пусть зависимость между двумя переменными x и y выражается в виде таблицы 1, полученной опытным путем. Это могут быть результаты опыта или наблюдений, статистических данных за ряд лет и т. п.

Таблица 1

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Требуется наилучшим образом сгладить экспериментальную зависимость между переменными x и y, т. е. по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x, исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений. Такую сглаженную зависимость стремятся представить в виде формулы $y = f(x)$.

Формула $y = f(x)$, полученная на основании экспериментальных данных, называется *эмпирической*.

Выбор эмпирической функции зависит от теоретических исследований и характера расположения на плоскости Oxy экспериментальных точек $(x_i;\, y_i),\ i = \overline{1;n}.$

Обычно для экономических исследований достаточно одной из шести следующих формул:

1) $y = a\cdot x + b$ – *линейная*;

2) $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ – *параболическая*;

3) $y = \dfrac{a}{x} + b$ – *гиперболическая*;

4) $y = a \cdot x^b$ – *показательная*;

5) $y = a \cdot e^{b \cdot x}$ – *экспоненциальная*.

Выбранная для приближения формула называется *теоретической*.

После выбора вида формулы требуется найти значения определяющих ее параметров таким образом, чтобы отклонения значений функции от экспериментальных значений были минимальными (a, b, c).

Суть *метода наименьших квадратов* изложим на примере *линейной зависимости* $y = a \cdot x + b$, где параметры подлежат определению из системы *нормальных уравнений*

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (5)$$

В случае *квадратичной зависимости* $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ параметры определяют из *нормальной системы*

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (6)$$

Пример 26. Результаты измерений величин x и y приведены в таблице 2.

Таблица 2

x	–2	–1	0	1	2	3
y	5,6	5	4,3	4	3,6	3

Решение

Требуется установить зависимость между этими величинами и определить параметры эмпирической формулы. Если принять пары значений (x_i; y_i) за координаты точек в декартовой системе координат, то на чертеже (рисунок 45) видно, что точки располагаются приблизительно на одной прямой, уравнение которой может быть записано в виде $y = ax + b$.

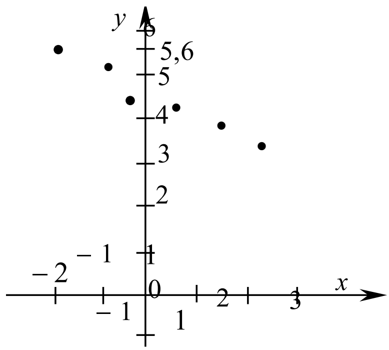


Рисунок 45

Определив a и b с помощью системы (5), найдем линейную зависимость $y = ax + b$ между величинами x и y.

Подсчитаем необходимые суммы, используя таблицу 3.

Таблица 3

i	x	y	$x \cdot y$	x^2
1	–2	5,6	–11,2	4
2	–1	5	–5	1
3	0	4,3	0	0
4	1	4	4	1
5	2	3,6	7,2	4
6	3	3	9	9
$\sum$	3	25,5	4	19

В последней строке таблицы записаны коэффициенты системы уравнений (5), которая принимает вид

$$\begin{cases} 19a + 3b = 4, \\ 3a + 6b = 25{,}5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим a = –0,5, b = 4,5. Требуемая зависимость имеет вид $y = -0{,}5x + 4{,}5$.

Тест 15. Установить вид функции $y = f(x)$ (рисунок 46)

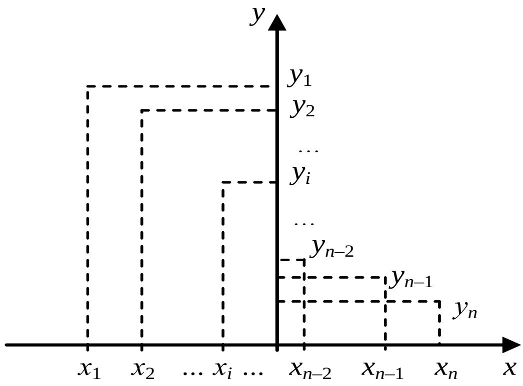


Рисунок 46

по характеру расположения на координатной плоскости экспериментальных точек:

1) $y = -\dfrac{a}{x}$;

2) $y = a \cdot x^2$;

3) $y = a \cdot e^x$;

4) $y = a \cdot x + b$;

5) $y = a \cdot \ln x + b$.

Тест 16. Метод наименьших квадратов позволяет находить:
1) вид функции двух переменных;
2) градиент функции двух переменных;
3) экстремум функции;
4) параметры эмпирических формул;
5) частные производные функции нескольких переменных.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	5	3	4	4	1	2	1	3	3	3

Номер теста	11	12	13	14	15	16
Правильный ответ	1	5	2	2	4	4

2.8. Первообразная и неопределенный интеграл

Множество вопросов математического анализа и приложений в разнообразных науках приводят к задаче отыскания для данной функции $f(x)$ такой функции $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Определение. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* по отношению к функции $f(x)$ на некотором интервале $(a; b)$, если при $x \in (a; b)$ $F'(x) = f(x)$.

Определение. Общее выражение $F(x) + C$ множества всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx,$ т. е. $\int f(x)dx = F(x) + C,$ где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $\int$ – знак неопределенного интеграла, x – переменная интегрирования.

Операция нахождения первообразной по ее производной или неопределенного интеграла по заданной подынтегральной функции называется *интегрированием* этой функции. Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

Основные свойства неопределенного интеграла следующие:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла, т. е.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен соответствующей алгебраической сумме от функций-слагаемых, т. е.

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

Таблица неопределенных интегралов включает следующие формулы:

1) $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + C, \ (n \in R, n \neq -1);$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4) $\int e^x dx = e^x + C;$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

Приведенные выше интегралы принято называть табличными.

Как известно, операция дифференцирования не выводит функцию из класса элементарных. С операцией интегрирования обстоит иначе: первообразные от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями. Укажем некоторые из них:

- $\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона (интеграл ошибок);

- $\int \sin(x^2)dx$ – интеграл Френеля;
- $\int \cos(x^2)dx$ – интеграл Френеля;
- $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;
- $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – интегральный синус;
- $\int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральный косинус.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int x^8 dx$.

Решение

По формуле 1 таблицы неопределенных интегралов имеем

$$\int x^8 dx = \frac{x^9}{9} + C.$$

Тест 1. Найти неопределенный интеграл $\int x^{10} dx$:

1) $x^{11} + C$;

2) $\frac{x^{11}}{11} + C$;

3) $\frac{1}{10}x^{11} + C$;

4) $\frac{1}{10}x^{10} + C$;

5) $10x^9 + C$.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int (5x^3 - 4\cos x + \frac{3}{\sin^2 x})dx$.

Решение

По свойствам 2 и 3 неопределенного интеграла и таблице неопределенных интегралов имеем

$$\int (5x^3 - 4\cos x + \frac{3}{\sin^2 x})dx = \int 5x^3 dx - \int 4\cos x dx +$$

$$+\int \frac{3}{\sin^2 x}dx = 5\int x^3 dx - 4\int \cos x dx + 3\int \frac{dx}{\sin^2 x} = 5\cdot\frac{x^4}{4} - 4\sin x - 3\mathrm{ctg}\, x + C.$$

Тест 2. Найти неопределенный интеграл $\int (4x^9 - \frac{2}{x} + 7\sin x)dx$:

1) $4x^{10} - \ln x - \cos x dx + C$;
2) $\frac{2}{5}x^{10} - 2\ln x - 7\cos x + C$;
3) $x^{10} - 2\ln x + 7\cos x + C$;
4) $2x^{10} - 2\ln x + \cos x + C$;
5) $4x^9 - \ln x + 7\cos x + C$.

Интегрирование способом подстановки

Суть этого метода заключается в следующем: так преобразовать подынтегральное выражение, чтобы полученный интеграл стал табличным или более простым.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ – любой из известных нам интегралов, то вместо переменной x в левую и правую части записанного равенства мы можем подставить другую переменную $u = \varphi(x)$, являющуюся дифференцируемой функцией от x. При этом также получим истинное равенство $\int f(u)du = F(u) + C$ или $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$. На du будем смотреть как на дифференциал функции $u = \varphi(x)$, который будем вычислять по формуле $du = \varphi'(x)dx$.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $\int \sin(5x+4)dx$.

Решение

Введем новую подстановку, положив $u = 5x + 4$, $du = (5x + 4)'dx = 5dx$, $dx = \frac{1}{5}du$. Внеся эти выражения в данный интеграл и сделав обратную замену, получим

$$\int \sin(5x+4)dx = \int \sin u \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int \sin u du = -\frac{1}{5}\cos u + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos(5x+4) + C.$$

Тест 3. Найти неопределенный интеграл $\int (3x+8)^6 dx$:

1) $\frac{1}{3}(3x+8)^7 + C$;

2) $\frac{1}{7}(3x+8)^7 + C$;

3) $\frac{1}{21}(3x+8)^7 + C$;

4) $\frac{1}{3}(3x+8)^6 + C$;

5) $\frac{1}{21}(3x+8)^6 + C$.

Пример 4. Определить число k в интеграле

$$\int 5\cos 3x dx = k\sin 3x dx + C.$$

Решение

Вычислим интеграл в левой части этого равенства, положив $u = 3x$.

Тогда $du = 3dx$, откуда $dx = \frac{1}{3}du$ и $\int 5\cos 3x dx = 5\int \cos u \frac{1}{3}du =$

$= \frac{5}{3}\int \cos u du = \frac{5}{3}\sin u + C = \frac{5}{3}\sin 3x + C$. Отсюда $k = \frac{5}{3}$.

Тест 4. Определить число k в интеграле $\int 7e^{2x}dx = ke^{2x} + C$:

1) $\frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{2}$;

3) $\frac{2}{3}$;

4) $\frac{7}{3}$;

5) $\frac{7}{2}$.

Пример 5. Среди множества всех первообразных в неопределенном интеграле $\int \frac{4}{x^3}dx$ найти такую первообразную $F(x)$, что $F(1)=7$.

Решение

Определим вначале значение этого интеграла

$$\int \frac{4}{x^3}dx = 4\int x^{-3}dx = 4\frac{x^{-2}}{-2} + C = -2\frac{1}{x^2} + C.$$

Среди множества всех первообразных выберем такую, которая удовлетворяет условию $F(1)=7$. Должно выполняться равенство $-2\frac{1}{1^2} + C = 7$, откуда $C = 9$.

Тест 5. Среди множества всех первообразных в неопределенном интеграле $\int xdx$ найти такую первообразную $F(x)$, что $F(4) = 6$:

1) $\frac{x^2}{2} + 2$;

2) $\frac{x^3}{3} - 1$;

3) $\frac{x^3}{3} + 3$;

4) $\frac{x^2}{2} - 2$;

5) $\frac{x^2}{2} - 5$.

Интегрирование по частям

Теорема. Пусть функции u и v определены и дифференцируемы на некотором отрезке $[a; b]$, тогда имеет место равенство

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Данная формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Пример 6. Найти неопределенный интеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Решение

Полагаем: $u = \ln x$, тогда $du = (\ln x)' dx$ или $du = \frac{dx}{x}$; $dv = x^3 dx$, отсюда $v = \int x^3 dx$ или $v = \frac{x^4}{4}$. По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int x^3 \ln x dx = (\ln x)\frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= (\ln x)\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx = (\ln x)\frac{x^4}{4} - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

Тест 6. Найти неопределенный интеграл $\int xe^x dx$:

1) $xe^x - e^x + C$;
2) $xe^x + e^x + C$;
3) $x^2 e^x - e^x + C$;
4) $xe^x - e^{2x} + C$;
5) $xe^{2x} - e^x + C$.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6
Правильный ответ	2	2	3	5	4	1

2.9. Определенный интеграл

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Точки, разделяющие отрезок $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_i; x_{i+1}]$ длиной $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, будем называть *точками разбиения*. Выберем в каждом из частичных отрезков $[x_i; x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i, $i = \overline{1,n}$.

Образуем сумму произведений

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которую будем называть интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Геометрический смысл величины σ показан на рисунке 47: это сумма площадей прямоугольников с основанием Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, $i = \overline{1,n}$.

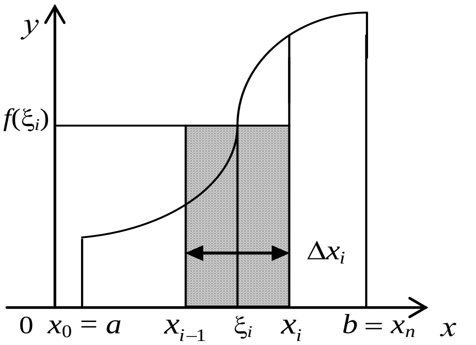


Рисунок 47

Обозначим через λ длину максимального частичного отрезка данного разбиения отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки, т. е. $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$.

Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, если он существует, называется определенным интегралом от функции f(x) по отрезку [a; b]:

$$I = \underbrace{\lim}_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Определенный интеграл обозначается при помощи символа

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Если определенный интеграл (1) существует, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$, числа a и b – соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования.*

Связь между определенным и неопределенным интегралами устанавливает формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для подынтегральной функции $f(x)$.

Пример 1. Найти определенный интеграл $\int_1^2 x^2 dx.$

Решение

Находим неопределенный интеграл, полагая $C = 0$. Имеем

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

Вычисляем приращение найденной первообразной

$$\frac{x^3}{3}\,|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Краткая запись: $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\,|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

Тест 1. Найти определенный интеграл $\int_2^3 x^4 dx$:

1) $\frac{213}{5}$;

2) $\frac{211}{5}$;

3) 42;

4) $\frac{214}{5}$;

5) 43.

Вычисление площадей плоских фигур при помощи определенного интеграла

Площадь плоской фигуры, изображенной на рисунке 48, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx. \qquad (2)$$

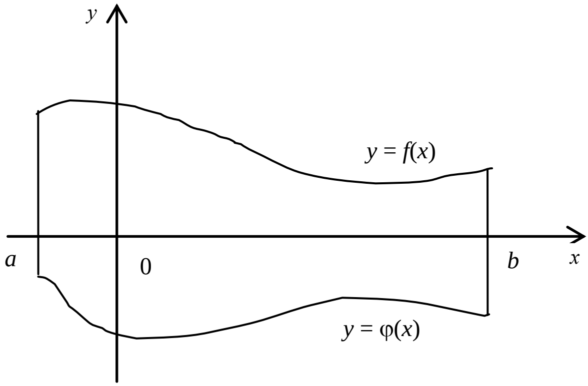


Рисунок 48

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 3$, $x = 0$.

Решение

Изобразим данную плоскую фигуру (рисунок 49).

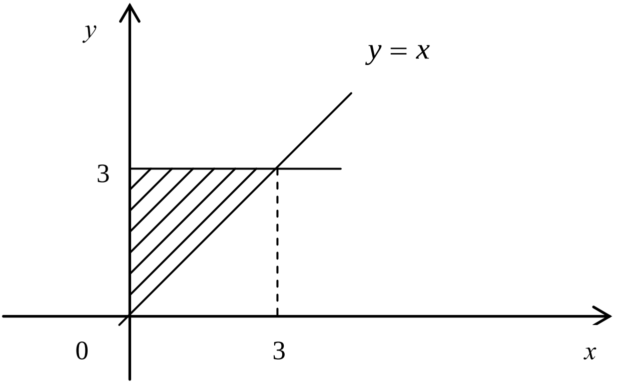


Рисунок 49

По формуле (2) имеем

$$S = \int_0^3 (3 - x)dx = (3x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

Тест 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x, \quad y = 0, x = 2$:

1) 1;
2) 2;
3) 1,5;
4) 0,5;
5) 2,5.

Вычисление объема тела вращения при помощи определенного интеграла

Объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции (рисунок 50), вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (3)$$

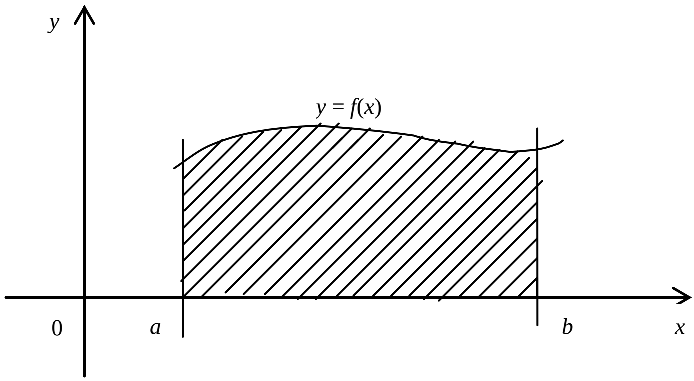


Рисунок 50

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$ вокруг оси Ox.

Решение

Вычертим данную фигуру (рисунок 51).

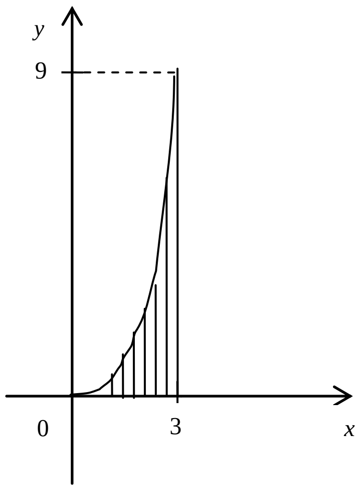


Рисунок 51

По формуле (3) будем иметь

$$V=\pi\int_0^3 (x^2)^2\,dx=\pi\int_0^3 x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^3=\frac{243}{5}\pi.$$

Тест 3. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ вокруг оси Ox:

1) π;

2) $\frac{\pi}{4}$;

3) $\frac{\pi}{3}$;

4) $\frac{\pi}{5}$;

5) $\frac{\pi}{7}$.

Применение определенного интеграла в экономике

Эти применения носят различный характер. Например, если известна функция затрат $f(t)$ предприятия на содержание управленческого аппарата в зависимости от времени за период, то средние затраты за период времени $[a; b]$ могут быть определены по формуле

$$P=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt. \qquad (4)$$

Пример 4. Найти средние затраты P предприятия на содержание управленческого аппарата за период $0 \le t \le 6$, если эти затраты зависят от времени t по закону $f(t)=5+3t$.

Решение

По формуле (4) имеем

$$P=\frac{1}{6}\int_0^6 (5+3t)dt=\frac{1}{6}(5t+\frac{3}{2}t^2)\Big|_0^6=\frac{1}{6}(5\cdot 6+\frac{3}{2}\cdot 6^2)=14.$$

Тест 4. Найти средние затраты P предприятия на содержание управленческого аппарата за период времени $0 \le t \le 5,$ если затраты зависят от времени t по закону $f(t) = 4 + 2t$:

1) 7;
2) 6;
3) 9;
4) 8;
5) 10.

Вычисление дуги кривой при помощи определенного интеграла

Длина l дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (5)$$

Пример 5. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$ при $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}.$

Решение

Находим производную $y' = -\operatorname{tg} x$ и подставляем ее значение в формулу (5)

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 3.$$

Тест 5. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x$ при $1 \le x \le 4$:

1) $15 + \ln 3$;
2) $\dfrac{15}{4} + \ln 2$;
3) $3 + \ln 5$;
4) $2 + \ln 7$;
5) $4 + \ln 6$.